

Berkovichräume

Oberseminar Arithmetische Geometrie im WS 2009/10

Ziel des Oberseminars ist es, die Konstruktion nicht-archimedischer analytischer Räume nach V. Berkovich zu verstehen. Das Programm ist daraufhin konzipiert, dass möglichst wenig 'schwarze Schachteln' in Kauf genommen werden müssen und wir uns vielmehr die Berkovichräume in einer Weise erarbeiten wollen, die ein aktives Hantieren damit ermöglichen soll. Insofern zielt das Programm auch nicht auf eine der tiefen Anwendungen dieser Theorie (lokaler Langlands für GL_n , ...), sondern legt größeren Wert auf die fundierte Einführung.

Zum Thema: Die Ausgangsfrage, die über Tates Einführung der rigid analytischen Räume und Raynauds Interpretation durch formale Geometrie zur Konstruktion Berkovichs geführt hat¹, läßt sich wie folgt angeben:

Gibt es eine gute Konstruktion analytischer Räume über einem nicht-archimedisch bewerteten Körper k , die – ähnlich wie die komplexen Mannigfaltigkeiten über $\mathbb{C}$ – transzendente Methoden zur Untersuchung von Varietäten über k erlauben?

Die zu konstruierenden Räume sollten topologisch "einfache" Gestalt haben, um singuläre (Ko-)Homologie, Homotopietheorie, ... zu ermöglichen (lokal zusammenhängend, lokal zusammenziehbar, ...). Die oben bereits angedeutete Entwicklung von Antworten auf diese Frage gibt auch die grobe Gliederung des Programms vor:

Rigid analytische Räume:

Tates Konstruktion der rigid analytischen Räume durch Verkleben von affinoiden Bausteinen als der erste, sehr erfolgreiche Schritt in diese Richtung. Ein Affinoid ist das MaxSpektrum $\text{Max}(A)$ einer affinoiden k -Algebren A , also eines Quotienten der Tate-Algebra

$$T_n := \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}_0^n} a_j X^j \mid a_j \in k, a_j \rightarrow 0 \text{ für } |j| \rightarrow \infty \right\} \subset k[[X_1, \dots, X_n]]$$

nach einem Ideal. Die angesprochenen Bausteine sind die affinoiden Teilgebiete $U \subset \text{Max}(A)$.

Die Topologie auf den erhaltenen rigid analytischen Räumen ist eine Grothendieck-Topologie – und genügt den Vorgaben nach einer möglichst einfachen Topologie nicht vollends.

¹daneben gibt es noch weitere Ansätze wie etwa R. Hubers adische Räume, die wir aber nicht besprechen werden

Berkovichräume:

Berkovich führt Tates Ideen weiter und betrachtet zu einem kommutativen Banach-Ring $\mathcal{A}$ mit Eins (etwa einer k -Affinoiden wie oben, oder aber auch $(\mathbb{Z}, |\cdot|)$ mit der trivialen Bewertung $|\cdot|$) das Seminorm-Spektrum

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \{|\cdot| : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid |\cdot| \text{ ist eine beschränkte, multiplikative Halbnorm} \} .$$

Jedes $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ liefert einen vollständigen Körper $\mathcal{H}(x)$, die Vervollständigung des Quotientenkörpers von $\mathcal{A}/\ker(x)$ und eine Auswertungsabbildung $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}(x)$, $f \mapsto f(x)$. Die Menge $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ erhält die schwächste Topologie, so dass all diese Auswertungsabbildungen stetig sind.

Die Bausteine für die Berkovichräume über k sind diese Spektren $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ für k -affinoide Algebren (welche hier zudem beliebig skaliert werden; die Tate'schen k -Affinoide nennt Berkovich strikt), bzw. deren affinoide Teilgebiete $V \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Man hat (wie auch in Tates Theorie) einen Funktor, der jeder algebraischen k -Varietät X einen Berkovichraum X^{an} über k zuordnet. Algebaische Eigenschaften von X spiegeln sich in topologischen Eigenschaften von X^{an} wieder (separiert – Hausdorff, eigentlich – kompakt, zusammenhängend – wegzusammenhängend).

Ziele:

Gesamtziel ist es die Konstruktion der rigid analytischen Räume und der Berkovichräume zu verstehen. Gegen Ende des Oberseminars wollen wir dabei zum Einen **die Beispiele $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ und $\mathbb{A}_k^n$** verstehen (was auf den ersten Blick nicht sehr ambitioniert klingt, es lassen sich aber etliche Seiten mit angrenzenden Fragestellungen füllen, s. [Po]), zum Anderen den **Homotopietyp von Kurven** bestimmen. Dies ist der erste Fall, wo man erahnt, dass die ursprüngliche Forderung nach einer schönen Topologie in der Tat erreicht wird. Der allgemeine Fall ist ungleich komplizierter zu verstehen ([Ber4]).

Vorträge:

1. **Termin (22.10.09). Vortragsverteilung.**
2. **Termin (29.10.09). Tate-Algebren.**
Definition der Tate-Algebra T_n und Angabe der wichtigsten Eigenschaften: noethersch, regulär, faktoriell. Beweis via Weierstraß-Techniken. Quotienten $T_n/\mathfrak{m}$ nach maximalen Idealen sind endlich über k .
[Bo1], 1.2
3. **Termin (05.11.09). Affinoide Algebren.**
Definition und Eigenschaften affinoider Algebren. Dazu benötigt man vorher ein Paar Eigenschaften von Idealen in T_n .
[Bo1], 1.3 und 1.4
4. **Termin (12.11.09). Affinoide Gebiete.**
Affinoide Gebiete ([Bo1], 1.5) und Teilgebiete ([Bo1], 1.6: bis einschl. Lemma 10 und Prop. 11 (letztere ohne Beweis?)).
5. **Termin (19.11.09). Die Grothendieck-Topologie auf $\text{Max}(A)$.**
Definition der zulässigen offenen Mengen und zulässigen Überdeckungen. Das Beispiel 2.2.8 in [Co] ist sehr lehrreich.
[Bo1], 1.10
6. **Termin (26.11.09). Rigid analytische Räume.**
Definition der Strukturgarbe auf $\text{Max}(A)$ ([Bo1], 1.7). Definition der rigid analytischen Räume ([Bo1], 1.12). Das Azyklizitätstheorem von Tate ohne allgemeinen Beweis, evtl. für die Einheitsscheibe $\text{Max}(T_1)$ erläutern (vgl. [Bo2], Folie 24).
7. **Termin (03.12.09). Berkovichs $\mathcal{M}(A)$.**
Berkovichs Spektrum eines Banachrings ([Ber1], 1.2). Theorem 1.2.1 in [Ber1].
[Ber1], 1.2; [Po]1.1.1
8. **Termin (10.12.09). $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ und $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$.**
Der Berkovichraum $\mathbb{A}_{\mathcal{A}}^n$ für einen kommutativen Banachring $\mathcal{A}$ ([Ber1], 1.5; [Po], 1.1.2).
9. **Termin (17.12.09). Allgemeinere Tate- und affinoide Algebren.**
allgemeinerer Begriff von affinoiden Algebren ([Ber1], 2; [Co], 4.2). Das Beispiel $k\{r^{-1}T_1, rT_2\}$ in [Ber1], S. 21 (siehe auch [Co], Exercise 4.2.6). Eigenschaften von affinoiden Algebren aus entsprechenden Ergebnissen über strikt affinoiden Algebren exemplarisch anführen.
[Ber1], 2.1
10. **Termin (07.01.10). Affinoide Räume.**
affinoide Gebiete wie in [Ber1], 2.2. (siehe auch [Co], 4.4.1). Spezielle Teilmengen ([Ber1], S. 30). Definition der Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(A)}$ ([Ber1], 2.3).

11. Termin (14.01.10). Berkovichräume.

k -affinoide Atlanten [Co], 5.1.3; [Ber2], 1.2 – vorher [Ber2], 1.1 zu topologischen Begriffen). Beachte: Berkovich hat in [Ber2] die Definition aus [Ber1] nochmals variiert (vgl. [Ber2], 1.5 bzw. [Co], S. 46). Das sollte kurz diskutiert werden, vor allem im Hinblick auf Morphismen ([Ber2], 1.2.5 etc.)

12. Termin (21.01.10). Morphismen zwischen Berkovichräumen.

durch die Definition der Räume in [Ber2] – im Gegensatz zu [Ber1] – ist die Definition von Morphismen relativ aufwendig: [Ber2], 1.2.5 – 1.2.15.

13. Termin (28.01.10). GAGA.

Konstruktion des Berkovichraumes X^{an} für ein algebraisches Schema X lokal veT über k ([Ber1], 3.4 und 3.5).

14. Termin (04.02.10). Der topologische Typ (projektiver Kurven)^{an}.

Ziel ist einen 'roter Faden' zum Theorem 4.2.1 und 4.3.2 in [Ber1] zu spinnen, welches den topol. Typ von X^{an} für eine projektive Kurve X angibt.

15. Termin (11.02.10). Themendiskussion für das SoS 2010.

The same procedure as last year, Miss Sophie?

The same procedure as every year, James.

- [Ber1] V. Berkovich, Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields, Math. Surveys and Monographs, no. 33, AMS, 1990
in Bibliothek: 80SK600 B 513
- [Ber2] V. Berkovich, Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces, Publ. IHES, no. 78 (1993), 5–161
- [Ber3] V. Berkovich, p -adic analytic spaces, in *Proceedings of the ICM, Vol. II (Berlin, 1998)*, Doc. Math. 1998, Extra Vol. II, 141–151
- [Ber4] V. Berkovich, Smooth p -adic analytic spaces are locally contractible. Invent. Math. 137 (1999), no. 1, 1–84
- [Bo1] S. Bosch, Lectures on formal and rigid geometry, Preprintreihe SFB Münster, Heft 378, April 2008
<http://wwwmath.uni-muenster.de/sfb/about/publ/bosch.html>
- [Bo2] S. Bosch, A mini-course on formal and rigid geometry, Beamer-Vortragsvorlagen, Januar 2009,
<http://wwwmath.uni-muenster.de/u/bosch/icms-rigid-geometry.pdf>
- [Co] B. Conrad, Several approaches to non-archimedean geometry, in *p -adic geometry*, Univ. Lecture Ser., 45, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 9–63
<http://math.stanford.edu/~conrad/papers/aws.pdf>

- [Du] A. Ducros, Espaces analytiques p -adiques au sens de Berkovich, Sém. Bourbaki, no. 958, 2005/6, Astrisque No. 311 (2007), 137–176
- [Po] J. Poineau, La droite de berkovich sur $\mathbb{Z}$, Preprint, Sept. 2008
<http://arxiv.org/abs/0809.2880> v1
- [Po2] J. Poineau, Une introduction á la droite de Berkovich sur $\mathbb{Z}$, kurzer Überblicksartikel, 2008
<http://www-irma.u-strasbg.fr/~poineau/Textes/DroitesurZ.pdf>
<http://www-irma.u-strasbg.fr/~poineau/Textes/LineoverZ.pdf>