

## Deformationen von Galoisdarstellungen

**Beginn:** 18.10.2007

**Raum:** M 104

**Zeit:** Do, 14-16 Uhr

---

In diesem Oberseminar beschäftigen wir uns mit der Deformationstheorie von Galoisdarstellungen nach dem Artikel "An Introduction to the Deformation Theory of Galois Representations" von Barry Mazur.

Sei  $\Pi$  eine proendliche Gruppe und  $A$  ein Koeffizientenring, d.h. ein vollständiger noetherscher lokaler Ring mit endlichem Restklassenkörper. Dann heißt ein stetiger Homomorphismus

$$\bar{\rho} : \Pi \rightarrow Gl_n(A), \quad n \in \mathbb{N}$$

eine Darstellung vom Grad  $n$  mit Koeffizientenring  $A$ .

Unser besonderes Interesse gilt den Galoisdarstellungen: Für einen Zahlkörper  $K$  und einer endlichen Menge von Primstellen  $S$  betrachten wir Darstellungen der proendlichen Gruppe  $G_{K,S}$ .

Sei  $h : A_0 \rightarrow A$  ein Koeffizientenringhomomorphismus und  $\tilde{h} : Gl_n(A_0) \rightarrow Gl_n(A)$  die induzierte Abbildung. Eine Deformation  $\rho$  von  $\bar{\rho}$  zum Koeffizientenring  $A_0$  ist eine strikte Äquivalenzklasse von Lifts, d.h. von stetigen Homomorphismen  $\rho : \Pi \rightarrow Gl_n(A_0)$ , so dass  $\tilde{h} \circ \rho = \bar{\rho}$  gilt.

$$\begin{array}{ccc} & Gl_n(A_0) & \\ \rho \nearrow & \downarrow \tilde{h} & \\ \Pi & \xrightarrow{\bar{\rho}} & Gl_n(A) \end{array}$$

Dabei heißen zwei Lifts  $\rho$  und  $\rho'$  strikt äquivalent, falls sie durch ein Element aus  $Gl_n(A_0)$ , das im Kern von  $\tilde{h}$  liegt, konjugiert sind.

### Motivation:

Die Deformationstheorie von Galoisdarstellungen spielte eine entscheidende Rolle im Beweis der Modularitätsvermutung für elliptische Kurven über  $\mathbb{Q}$ . (Wiles, Taylor)

Sei  $\Lambda$  ein Koeffizientenring mit Restklassenkörper  $k$ . Dann definieren wir die Kategorie  $\mathcal{C}_\Lambda$ , deren Objekte die Koeffizienten- $\Lambda$ -Algebren mit Restklassenkörper  $k$  sind und deren Morphismen die lokalen  $\Lambda$ -Algebrenmorphismen sind, welche die Identität auf  $k$  induzieren. Ist  $\bar{\rho} : \Pi \rightarrow Gl_n(k)$  eine Darstellung, so definieren wir einen (Deformations-) Funktor

$$D_{\bar{\rho}, \Lambda} : \mathcal{C}_\Lambda \rightarrow \underline{Sets}$$

$$D_{\bar{\rho}, \Lambda}(R) = \left\{ \begin{array}{l} \text{strikte Äquivalenzklassen von} \\ \text{Deformationen von } \bar{\rho} \text{ nach } R \end{array} \right\}.$$

### **Theorem (Mazur, Ramakrishna)**

Sei  $\Pi$  eine proendliche Gruppe, die die  $p$ -Endlichkeitsbedingung erfüllt,  $k$  ein endlicher Körper und

$$\bar{\rho} : \Pi \rightarrow Gl_n(k)$$

eine Darstellung, so dass  $\{P \in M_n(k) \mid P\bar{\rho}(g) = \bar{\rho}(g)P \text{ für alle } g \in \Pi\} = k$  gilt.

Sei  $\Lambda$  ein Koeffizientenring mit Restklassenkörper  $k$ . Dann ist der Deformationsfunktor  $D_{\bar{\rho}, \Lambda}$  darstellbar.

Der Ring, durch den  $D_{\bar{\rho}, \Lambda}$  dargestellt wird, heißt der universelle Deformationsring von  $\bar{\rho}$ .

In verschiedenen Situationen möchten wir nicht alle Deformationen einer absolut irreduziblen Darstellung betrachten, sondern nur bestimmte mit speziellen Eigenschaften. Zu diesem Zweck definieren wir zu sogenannten Deformationsbedingungen einen Unterfunktor des Deformationsfunktors. Wir erhalten zu diesem Funktor einen "universellen Deformationring mit der speziellen Eigenschaft", welcher ein Quotient des universellen Deformationsringes ist. Als geeignete Eigenschaft erweist sich beispielsweise "alle Deformationen mit einer vorgegebenen Determinante".

## 1. VORTRAG (18.10.): Übersichtsvortrag und Vortragsvergabe

## 2. VORTRAG (25.10.): Gruppendarstellungen und Funktoren

Dieser Vortrag beinhaltet §4, 5, 6 sowie §14 ([M2]). Insbesondere soll auf Schurs Lemma sowie auf Charaktere zu Darstellungen eingegangen werden. In diesem Zusammenhang soll gezeigt werden, dass absolut irreduzible Darstellungen mit dem gleichen Charakter äquivalent sind. Anschließend werden für einen Unterring  $A_0$  von  $A$  "Abstiege" einer Darstellung  $\bar{\rho} : \Pi \rightarrow GL_n(A)$  von  $A$  nach  $A_0$  betrachtet. Zuletzt sollen stetige Funktoren vorgestellt werden und auf Faserprodukte eingegangen werden.

### 1.11. Allerheiligen

## 3. VORTRAG (8.11.): Der Zariski-Tangentialraum

In diesem Vortrag soll der Zariski-Tangentialraum zu einer Koeffizienten- $\Lambda$ -Algebra eingeführt werden und die funktorielle Interpretation des Zariski-Tangentialraums erörtert werden ([M2], §15). Danach sollen der Zariski-Tangential-Modul ([M2], §16) und der Zusammenhang der stetigen Kählerdifferentialle mit dem Zariski-Tangentialraum behandelt werden ([M2], §17).

## 4. VORTRAG (15.11.): Existenz universeller Deformationsringe I

Ziel dieses Vortrags ist der Beweis der Existenz eines universellen Deformationsringes ([Go], Thm. 3.10). Dazu sollen zuerst die Schlessinger-Bedingungen H1-H4 angegeben werden ([Go], S. 273) und das Theorem von Schlessinger über die Prodarstellbarkeit von Funktoren formuliert werden ([Go], Thm. 3.1, ohne Beweis). Anschließend kann gezeigt werden, dass der Deformationsfunktork unter bestimmten Voraussetzungen die Bedingungen H1-H4 erfüllt ([Go], Thm. 3.3 mit Beweis (= Lemma 3.4 - Lemma 3.9)). Das Theorem von Schlessinger liefert nun die Existenz eines universellen Deformationsringes ([Go], Thm. 3.10). Abschließend sollen relativ darstellbare Funktoren eingeführt werden ([M2], §19) und das Lemma in §19 bewiesen werden ([M2], S. 279).

## 5. VORTRAG (22.11.): Existenz universeller Deformationsringe II

Dieser Vortrag umfaßt §10 und §20 ([M2]). Hierbei soll aus §10 nur die Proposition über den universellen Deformationsring angegeben werden. In §20 werden Darstellungsergebnisse formuliert. Dazu wird aus §18 ([M2], S. 277) die Definition "fast darstellbar" benötigt. Die Propositionen 1, 3a, 3b und 4 in §20 behandeln die Stetigkeit und Fastdarstellbarkeit des Funktors  $D_{\bar{\rho}}$  in bestimmten Fällen. Im Beweis von Proposition 1 wird der Funktor  $D_{\bar{\rho}}$  im Sinne von §11 ([M2]) interpretiert. In diesem Zusammenhang soll auf diese Interpretation nur kurz eingegangen werden.

## 6. VORTRAG (29.11.): Der Tangentialraum als Galoiskohomologiegruppe

Für eine Koeffizienten- $\Lambda$ -Algebra  $A$  soll zunächst der Zariski-Tangential- $A$ -Modul als erste Kohomologiegruppe von  $\Pi$  mit Werten in einem Endomorphismenring interpretiert werden ([M2], §21, Prop. 1). Damit können Endlichkeitsaussagen für den Zariski-Tangential- $A$ -Modul gezeigt werden ([M2], §21, Prop. 2a, 2b, Korollar). Eine weitere Interpretation des Zariski-Tangentialraums ist durch "Erweiterungen von Moduln" gegeben. In diesem Zusammenhang soll die Proposition in §22 ([M2]) erläutert werden.

## 7. VORTRAG (6.12.): Explizite Berechnung eines universellen Deformationsringes

In diesem Vortrag soll ein universeller Deformationsring konkret berechnet werden. Nach Boston ist der universelle Deformationsring einer ungeraden absolut irreduziblen zahmen Darstellung  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q},S} \rightarrow GL_2(\mathbb{F}_p)$  unter bestimmten Voraussetzungen durch  $\mathbb{Z}_p[[T_1, T_2, T_3]]$  gegeben ([Go], Kapitel 5 bis einschl. Thm. 5.7, siehe auch [Bo]).

## 8. VORTRAG (13.12.): Deformationsbedingungen

Vortrag 8 beinhaltet zunächst die Definition einer Deformationsbedingung und eines Unterfunktors des Darstellungsfunktors zu dieser Deformationsbedingung ([M2], §23). Als Beispiel einer Deformationsbedingung soll die Determinantenbedingung untersucht werden ([M2], §24). Abschließend wird eine weitere Klasse der Deformationsbedingungen, die kategoriellen, angegeben ([M2], §25).

## 9. VORTRAG (20.12.): Galoisdeformationsbedingungen

Dieser Vortrag befaßt sich mit Deformationsbedingungen (mit fixierter Determinante) für globale Galoisdarstellungen  $\bar{\rho} : G_{K,S} \rightarrow GL_n(A)$  und der Beschreibung des assoziierten Zariski-Tangential- $A$ -Moduls ([M2], §26). Der Spezialfall in §28 ([M2]) soll nur kurz angegeben werden. Im Anschluss daran werden lokale Galoisdeformationsbedingungen untersucht: Minimale Verzweigungsbedingungen für Darstellungen vom Grad zwei ([M2], §29).

## 10. VORTRAG (10.1.): Die Deformationsbedingung "gewöhnlich"

Die Deformationsbedingung "gewöhnlich" soll im lokalen Fall für Galoisdeformationsbedingungen für Darstellungen vom Grad zwei betrachtet werden ([M2], §30).

## 11./12. VORTRAG (17.1./24.1.): Anwendung auf den Beweis des Wiles-Taylor-Theorems I +II

Ziel der letzten beiden Vorträge ist der Beweis des Theorems 1 aus [S], welches ein wichtiger Baustein in Wiles' Beweis der Shimura-Taniyama-Weil-Vermutung ist.

Sei  $\bar{\rho} : G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(k)$  eine ungerade irreduzible modulare Darstellung mit Koeffizienten in einem endlichen Körper  $k$  und  $\mathcal{D}$  ein Deformationstyp. In dieser Situation erhalten wir einen universellen Deformationsring  $R_{\mathcal{D}}$ , die Heckealgebra  $T_{\mathcal{D}}$  sowie einen kanonischen Homomorphismus  $\varphi_{\mathcal{D}} : R_{\mathcal{D}} \rightarrow T_{\mathcal{D}}$  von lokalen Ringen.

Die Aussage des Theorems 1 ist die folgende: Ist  $\mathcal{D}$  ein minimaler Deformationstyp, dann ist  $\varphi_{\mathcal{D}}$  ein Isomorphismus und  $T_{\mathcal{D}}$  ein lokal vollständiger Durchschnitt.

PUFFERTERMIN (31.1.)

PROGRAMMDISKUSSION (7.2.)

## Literatur

- [Bo] Boston, N.: *Explicit deformation of Galois representations*, Invent. Math. **103**, S. 181-196 (1991)
- [Go] Gouvêa, F. G.: *Deformations of Galois Representations*, in: B. Conrad, K. Rubin (Ed.): *Arithmetic Algebraic Geometry*, IAS/ Park City Mathematics Series Volume **9**, Institute for Advanced Study, AMS 2001
- [M1] Mazur, B.: *Deforming Galois Representations*, in: Y. Ihara, K. Ribet, J.-P. Serre (Ed.): *Galois Groups over  $\mathbb{Q}$* , MSRI Publications **16**, Springer-Verlag, 1989
- [M2] Mazur, B.: *An Introduction to the Deformation Theory of Galois Representations*, in: G. Cornell, J. H. Silverman, G. Stevens (Ed.): *Modular Forms and Fermat's Last Theorem*, Papers on the Instructional Conference on Number Theory and Arithmetic Geometry, Springer-Verlag, 1997
- [S] de Shalit, E.: *Hecke Rings and Universal Deformation Rings*, in: G. Cornell, J. H. Silverman, G. Stevens (Ed.): *Modular Forms and Fermat's Last Theorem*, Papers on the Instructional Conference on Number Theory and Arithmetic Geometry, Springer-Verlag, 1997
- [Sch] Schlessinger, M.: *Functors of Artin Rings*, Trans. AMS **130**, S. 208-222 (1968)