

Klassenkörpertheorie arithmetischer Schemata

Beginn: 19.10.2006

Raum: M 104

Zeit: Do, 14-16 Uhr

1. VORTRAG (19.10.): Übersichtsvortrag und Vortragsvergabe

2. VORTRAG (26.10.): Zahm verzweigte Überlagerungen

Zunächst werden einige Grundlagen über die étale Fundamentalgruppe zusammengetragen, insbesondere die Begriffe Galoiskategorie und Faserfunktorkomplex ([Mu], Ch. V). Danach soll auf Zerlegungs-, Trägheits- und Verzweigungsgruppen von Überlagerungen eingegangen werden (z.B. nach [S1], §1). Anschließend werden die Zahmheitsbegriffe nach Grothendieck, Schmidt und Wiesend vorgestellt ([W1], 2.1, 2.2, 2.3) und [W1], Prop. 1 bewiesen. Zuletzt wird eine Übersicht über einige Eigenschaften exzellenter Ringe gegeben ([Liu], Thm. 2.39 a), c), d), Cor. 2.40).

3. VORTRAG (2.11.): Vergleich der Zahmheitsbegriffe

Dieser Vortrag beinhaltet einen Vergleich der in Vortrag 2 eingeführten Zahmheitsbegriffe in Form von [W1], Thm. 2. In diesem Zusammenhang soll das Verallgemeinerte Abhyankar Lemma mit Beweis(-skizze ?) ([SGA1], Exp. XIII, §5) behandelt sowie die Reinheit des Verzweigungsortes zitiert werden. Danach soll auf [W1], Bem. 3, Bem. 4 eingegangen werden sowie Prop. 5 gezeigt werden.

4. VORTRAG (9.11.): Überlagerungen von Varietäten mit vollzerlegten Punkten

Es soll der Beweis von [W2], Thm. 1 und Cor. 2 vorgestellt werden. Dabei soll von Lemma 5 nur eine Beweisskizze angegeben und Lemma 6 nur zitiert werden.

5. VORTRAG (16.11.): Das Approximationslemma

Zuerst werden die Begriffe Hilbertscher Körper und PAC-Körper definiert ([FJ]) sowie Bem. 3 aus [W2] bewiesen. Der Rest des Vortrags beschäftigt sich mit dem Beweis des Approximationslemmas ([W3], §5).

6. VORTRAG (23.11.): Überlagerungsprobleme und deren Lösungen

Dieser Vortrag umfaßt die Abschnitte 2 und 3 aus [W3]. Hierbei werden die für den Rest des Seminars grundlegenden Begriffe eines (beschränkten/induzierten) Überlagerungsproblems

für arithmetische Schemata oder Varietäten X und deren (schwache) Lösungen eingeführt sowie einige elementare, aber sehr nützliche Resultate im Zusammenhang mit diesen Begriffen gezeigt.

7. VORTRAG (30.11.): **Fortsetzung und Konstruktion schwacher Lösungen**

Es wird gezeigt, dass sich unter gewissen Voraussetzungen schwache Lösungen auf offenen Teilmengen von X zu schwachen Lösungen auf ganz X fortsetzen ([W3], §4). Wird ein Überlagerungsproblem nach étalem Basiswechsel trivial, so existiert eine schwache Lösung ([W3], §6).

8. VORTRAG (7.12.): **Abelsche Überlagerungsprobleme**

In diesem Vortrag wird gezeigt, dass jedes beschränkte Überlagerungsproblem und jedes abelsche Überlagerungsproblem eine eindeutige Lösung besitzt ([W3], §7, §8). Dabei soll auf das Endlichkeitsresultat aus [?] und den Dichtigkeitssatz von Chebotarev für Kurven (???) eingegangen werden.

9. VORTRAG (14.12.): **Topologische Aspekte der globalen KKT**

Dieser Vortrag dient der Wiederholung einiger Grundlagen aus der globalen Klassenkörpertheorie. Als erstes soll die Idele(klassen)gruppe sowie die darauf definierte Topologie eingeführt werden ([Nk], VI, §1). Anschließend sollen Prop. 1.5 und Prop. 1.6 gezeigt werden. Danach wird die Zusammenhangskomponente der Eins der Ideleklassengruppe studiert: [NSW] VIII, §2, 8.2.1 und 8.2.2 mit Beweis, 8.2.5 angeben (ohne Beweis). Im zweiten Teil wird die für Wiesends höherdimensionale Klassenkörpertheorie grundlegende topologische Gruppe I_X eingeführt ([W4], Def. 1, Def. 2, Bem. 3).

10. VORTRAG (21.12.): **Funktorialität und Basiswechsel von I_X und C_X**

Es wird die ko- und die kontravariante Funktorialität von I_X sowie eine Basiswechseleigenschaft vorgestellt ([W4], Lemma 1). Im Anschluß daran wird die Klassengruppe C_X eingeführt und ein analoges Resultat für diese gezeigt ([W4], Def. 3, Lemma 2) und Bemerkung 4 diskutiert. Die zahme Klassengruppe C_X^t ist ein gewisser Quotient der Klassengruppe C_X ([W4], Def. 4, Lemma 3).

11. VORTRAG (11.1.): **Wiesends höherdimensionale KKT**

Ziel dieses Vortrags ist der Beweis des Hauptergebnisses von Wiesends Formulierung der höherdimensionalen Klassenkörpertheorie und zweier Korollare ([W4], Lemma 4, Thm. 2, Cor. 1, Cor. 2).

12. VORTRAG (18.1.): **Singuläre Homologie arithmetischer Schemata**

Es soll eine Übersicht über singuläre Homologie arithmetischer Schemata nach [S3] gegeben werden. Bei der Stoffauswahl sollte man sich an [S2], §1 orientieren.

13. VORTRAG (25.1.): **Folgerungen aus Wiesends höherdimensionaler KKT**

Mit Hilfe von Wiesends Klassenkörpertheorie lassen sich einige Aussagen aus [SS] über den Reziprozitätshomomorphismus

$$\text{rec}_X : H_0^{\text{sing}}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \pi_1^t(X)^{ab}$$

einfacher beweisen ([S2], §2, §3). Die Hauptergebnisse der unverzweigten Klassenkörpertheorie nach Bloch-Kato-Saito lassen sich ebenfalls aus Wiesends Klassenkörpertheorie ableiten ([W4], Cor. 3).

PUFFERTERMIN (1.2.)

PROGRAMMDISKUSSION (8.2.)

Literatur

- [FJ] Fried, M., Jarden, M.: *Field Arithmetic*, second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Band 11. Springer-Verlag, Berlin 2005
- [Liu] Liu, Q.: *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics 6, Oxford University Press, Oxford 2002
- [Mu] Murre, J. P.: *Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental group*. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics, No 40. Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1967
- [Nk] Neukirch, J.: *Algebraische Zahlentheorie*, Springer 1992
- [NSW] Neukirch, J., Schmidt, A., Wingberg, K.: *Cohomology of number fields*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 323. Springer-Verlag, Berlin, 2000
- [SGA1] Grothendieck, A.: *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*. Lecture Notes in Mathematics 224, Springer, Heidelberg 1971
- [S1] Schmidt, A.: *Tame coverings of arithmetic schemes*. Math. Ann. 322 (2002), no. 1, 1–18
- [S2] Schmidt, A.: *Singular homology of arithmetic schemes*. Preprint 2000, <http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0418/>
- [S3] Schmidt, A.: *Some consequences of Wiesend's higher dimensional class field theory*. Preprint 2006
- [SS] Schmidt, A., Spieß, M.: *Singular homology and class field theory of varieties over finite fields*. J. Reine Angew. Math. 527 (2000), 13–36

- [W1] Wiesend, G.: *Tamely Ramified Covers of Varieties and Arithmetic Schemes*. Preprint 2005
- [W2] Wiesend, G.: *Covers of varieties with completely split points*. Israel J. Math. 154 (2006), 51–?
- [W3] Wiesend, G.: *A construction of covers of arithmetic schemes*. J. Number Theory 121 (2006), 118–131
- [W4] Wiesend, G.: *Class Field Theory for Arithmetic Schemes*. Preprint 2006