

Programm des Oberseminars "Néron-Modelle"

Im Folgenden bezeichne Y/S stets ein S -Schema. Weiter sei R ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K , maximalem Ideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper k . Mit X^K sei ein Schema über K bezeichnet und X sei ein Modell von X^K über R . Weiter soll mit G stets ein Gruppenschema und mit A stets eine abelsche Varietät bezeichnet werden.

1. Vortrag: Einführung (20.10.05)

1. Teil: In einem Übersichtsvortrag wird die Definition eines Néron-Modells gegeben. Auch werden kurz die wichtigsten Schritte des Existenzbeweises für Néron-Modelle vorgestellt.

2. Teil: Hier werden einige Fakten aus der algebraischen Geometrie wiederholt. Konkret werden die Definitionen der Garbe der relativen Differentialformen $\Omega_{Y/S}^1$ und des Begriffs glatt angegeben. Weiterhin sollen die wesentlichen Aussagen zu diesen Begriffen kurz formuliert werden.

2. Vortrag: Hintergrundwissen aus der algebraischen Geometrie (27.10.05)

Es sollen die Begriffe Henselscher Ring (§2.3) und S -rationale Abbildung (§2.5) mit ihren wesentlichen Eigenschaften vorgestellt werden.

3. Vortrag: Glättung und Dilatation (3.11.05)

In diesem Vortrag wird definiert, was man unter einer Glättung versteht (§3.1) und es soll der Satz über den Glättungsprozess (Beweis folgt in Vortrag 4) formuliert werden.

Weiterhin wird der Begriff der Dilatation eingeführt und es werden die wichtigsten Aussagen zu diesem Begriff zusammengefasst (§3.2).

Schließlich folgt die Definition des Néron-Maßes für den Glattheitsdefekt δ . Weiterhin soll gezeigt werden, wie δ mit dem glatten Ort zusammenhängt und dass δ auf den Punkten $X(R^{sh})$ (mit X/R) beschränkt ist (§3.3 Lemma 1&2 und Proposition 3).

4. Vortrag: Der Glättungssatz (10.11.05)

Nun soll der Glättungssatz bewiesen werden. Es ist bereits bekannt, dass $m := \max_{a \in X(R^{sh})} \delta(a)$ ein Maß dafür ist, wie weit X davon entfernt ist, in den Punkten $X(R^{sh})$ glatt zu sein. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass man durch geeignetes Aufblasen von X zu X' in der speziellen Faser erreichen kann, dass sich für gewisse Punkte der Glattheitsdefekt nach dem Aufblasen verkleinert hat (§3.3 ab S. 67).

Damit kann man nun den Satz über den Glättungsprozess zeigen. Dieser besagt, dass jedes R -Schema X v.e.T. mit glatter generischer Faser X_K eine Glättung zulässt (§3.4).

5. Vortrag: Schwache Néron-Modelle und Gruppenschemata (17.11.05)

Hier wird zuerst der Begriff eines schwachen Néron-Modells definiert. Anschließend sollen der Satz über die Existenz eines schwachen Néron-Modells und die Proposition zur schwachen Néron-Eigenschaft gezeigt werden (§3.5 bis S. 75).

Der zweite Teil des Vortrags behandelt den Begriff des Gruppenschemas. Konkret soll hierbei die Definition eines Gruppenschemas angegeben und anschließend dieser Begriff diskutiert werden (§4.1).

6. Vortrag: Translationsinvariante Differentialformen (24.11.05)

Sei G^K ein K -Gruppenschema. Es soll zunächst die Existenz von invarianten Differentialformen und deren Eigenschaften diskutiert werden (§4.2).

Bezeichne ω eine linksinvariante Differentialform, die $\Omega_{G^K/K}^{\dim(G^K)}$ erzeugt. Dann soll der Ausdruck $\text{ord}_X(\omega)$ erläutert werden (mit X Modell von G^K). Weiter ist zu zeigen, dass für alle R -Modelle X von G^K (X/R glatt, separiert und v.e.T. mit irreduzibler spezieller Faser) die Zahlen $\text{ord}_X(\omega)$ nach unten beschränkt sind. Dies liefert den Begriff der so genannten ω -minimalen Modelle (§4.3 bis einschl. Proposition 2).

7. Vortrag: Modelle $\overline{X}$ (bzw. X) mit (R -birationalen) Gruppengesetz (1.12.05)

Durch Verkleben gewisser ω -minimaler Modelle eines K -Gruppenschemas X^K erhält man ein glattes, separiertes R -Schema X v.e.T. mit generischer Faser X^K . Es soll weiterhin gezeigt werden, dass sich das Gruppengesetz von X^K zu einem R -birationalen Gruppengesetz von X fortsetzen lässt (§4.3 ab S. 105 unten).

Auch soll 4.3 Satz 6 formuliert werden (Beweis folgt in den nachfolgenden Vorträgen). Dieser Satz besagt, dass man ein $\overline{X}$ findet, so dass $X \subset \overline{X}$ R -dicht liegt und sich das R -birationale Gruppengesetz von X zu einem Gruppengesetz auf $\overline{X}$ fortsetzt (Später werden wir sehen, dass $\overline{X}$ bereits das Néron-Modell von X^K ist).

Es soll schließlich noch ein Satz von A. Weil (§4.4) erörtert werden, der besagt, dass eine rationale Abbildung eines glatten Schemas in ein separiertes Gruppenschema bereits überall definiert ist, wenn sie in Kodimension eins definiert ist.

8. Vortrag: Lösung für S -birationales Gruppengesetz (8.12.05)

Es sollen die Begriffe eines S -birationalen Gruppengesetzes und einer Lösung für ein S -birationales Gruppengesetz eingeführt werden. Die Lösung für ein S -birationales Gruppengesetz ist dabei bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt (§5.1). Weiter soll die Existenzaussage für eine solche Lösung im Falle, dass S (noethersch und normal) das Spektrum eines henselschen lokalen Ringes ist, formuliert werden (Beweis folgt in den nächsten Vorträgen). Es soll an dieser Stelle mit einem Verweis auf Kapitel 6 kurz darauf hingewiesen werden, dass diese Aussage noch allgemeiner gilt (vgl. Bem. auf S.117).

Abschließend ist noch zu zeigen, dass es für den Beweis von 4.3/6 (Vortrag 7) genügt, in unserem Spezialfall die Existenzaussage für Lösungen von S -birationalen Gruppengesetzen zu zeigen (§5.2).

9. Vortrag: Beweis der Existenzaussage für Lösungen von S -birationalen Gruppengesetzen (15.12.05)

Hier soll begonnen werden, die Existenzaussage für Lösungen von S -birationalen Gruppengesetzen aus Vortrag 8 über einer strikt henselschen Basis zu zeigen (§5.3 bis S. 124 unten).

10. Vortrag: Néron-Modelle (22.12.05)

In diesem Vortrag soll der Existenzbeweis für Lösungen von S -birationalen Gruppengesetzen abgeschlossen werden (§5.3 ab S. 125). Damit ist der Beweis für die Existenz von Néron-Modellen (bis auf das ausgesparte Kapitel 6) abgeschlossen. Deshalb sollte an dieser Stelle noch einmal kurz der größere Zusammenhang des bis jetzt Bewiesenen wiederholt werden (im Wesentlichen §§1.2-1.4).

11. Vortrag: Néron-Modelle von Elliptischen Kurven (12.1.06)

In diesem Vortrag soll die in §1.5 beschriebene explizite Konstruktion von Néron-Modellen im Falle von Elliptischen Kurven zusammengefasst werden (vgl. auch Silverman).

Als Vorbereitung für die letzten beiden Vorträge wird der Begriff des Torseurs definiert (§6.4 Vorspann). Weiterhin sollen die Aussagen §6.5/3 und §6.5/4 ohne Beweis angegeben werden. Schließlich soll noch eine Bedingung studiert werden, die klärt, wann ein Gruppenschema G/R mit gewissen Eigenschaften bereits ein Néron-Modell von G_K ist (§7.1 einschl. Bsp. 3).

12. Vortrag: Verträglichkeit von Néron-Modellen und Basiswechsel/Isogenien (19.1.06)

Zunächst sollen die in Vortrag 11 begonnenen Überlegungen zu einem Abschluss gebracht werden (§7.1 ab S. 174).

Dann soll gezeigt werden, in wie weit die Bildung von Néron-Modellen verträglich mit Basiswechsel ist (§7.2).

Seien G und $\tilde{G}$ Gruppenschemata über R , die Néron-Modelle von G^K bzw. $\tilde{G}^K$ sind. Man kann sich weiter fragen, ob eine Isogenie $i: G^K \rightarrow \tilde{G}^K$ bereits durch eine Isogenie $\iota: G \rightarrow \tilde{G}$ induziert wird (§7.3).

Schließlich sollen noch die Definitionen von semi-abelscher bzw. abelscher Reduktion angegeben werden und einige Aussagen zu diesen Begriffen gezeigt werden (§7.4 bis einschl. Lemma 2).

13. Vortrag: (Semi-)abelsche Reduktion und Néron-Modelle in exakten Sequenzen (26.1.06)

Hier sollen zunächst Eigenschaften von Néron-Modellen mit abelscher und semi-abelscher Reduktion diskutiert werden. Auch wollen wir verstehen, wann es Néron-Modelle mit abelscher und semi-abelscher Reduktion gibt (§7.4 ab S.182). Dabei werden wir unter Anderem auf das Kriterium von Néron-Ogg-Shavarevich für gute Reduktion treffen.

Abschließend soll noch das Verhalten von Gruppenschemata/abelschen Varietäten in exakten Sequenzen untersucht werden (§7.5).

Der Termin am 2.2.06 ist als Zeitpuffer gedacht.

Abstimmung über das Oberseminarthema im Sommersemester: 9.2.06

Literatur:

BOSCH, LÜTKEBOHMERT, RAYNAUD; Néron Models; Springer-Verlag; 1990;

HARTSHORNE; Algebraic geometry; Springer-Verlag 1977;

MILNE; Abelian Varieties; Arithmetic geometry; Springer-Verlag; 1986;

MILNE; Étale Cohomology; Princeton University Press; 1980;

SILVERMAN; Advanced Topics in the Arithmetic of Elliptic Curves; Springer-Verlag; 1994;