

Iwasawatheorie

Oberseminar Arithmetische Geometrie
Sommersemester 2009
Universität Regensburg

Zeit: Do 14–16 Uhr; Ort: M 104

Zusammenfassung

Die klassische Iwasawatheorie beschäftigt sich mit Galoiserweiterungen F_∞/F eines Zahlkörpers F mit Galoisgruppe $\mathbb{Z}_p$. Hier sei p eine Primzahl größer 2. Insbesondere interessiert man sich für die zyklotomische Erweiterung eines Zahlkörpers, die von der $\mathbb{Z}_p$ -Erweiterung

$$\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}(\mu_p)$$

induziert wird. Es stellt sich heraus, dass die zyklotomische $\mathbb{Z}_p$ -Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers F eng mit den speziellen L -Werten

$$W_n := L(1 - n, \psi\omega^{-n}) \tag{1}$$

zusammenhängt, wobei ψ ein gerader nicht-trivialer Dirichletcharakter mit $F_\psi \cap F_\infty = F$ und ω der Teichmüller Charakter ist ($n \geq 1$). Der genaue Zusammenhang ist durch die sogenannte Hauptvermutung der Iwasawatheorie gegeben, deren vollständiger Beweis 1990 durch Wiles erbracht wurde [4].

Um von speziellen L -Werten zu $\mathbb{Z}_p$ -Erweiterungen zu kommen, sind im Wesentlichen zwei Schritte nötig. Zunächst beobachtet man, dass die Werte in (1) für variierendes n sogenannte Kummerkongruenzen erfüllen, deren Bestehen durch die Existenz einer p -adischer L -Funktion $L_p(s, \psi)$ erklärt wird. Diese p -adische L -Funktion ist eine stetige Funktion für $s \in \mathbb{Z}_p$ mit Werten in $\mathbb{C}_p$ und der Zusammenhang mit den klassischen L -Werten in (1) ist gegeben durch

$$L_p(1 - n, \psi) = W_n \prod_{\mathfrak{p} \in S_p} (1 - \psi\omega^{-n}(\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{n-1})$$

für $n \geq 1$. Die p -adische L -Funktion eines total reellen Zahlkörpers wurde zuerst von Deligne und Ribet [1] als Mellin-Transformation eines p -adischen Maßes konstruiert. Dieses p -adische Maß kann man auch als formale Potenzreihe $G_\psi(T) \in \mathbb{Z}_p[\psi][[T]]$ auffassen.

Im zweiten Schritt – und dies ist der Kern der Hauptvermutung – studiert man den Modul $X = \text{Gal}(L_\infty/H_\infty)$ über der Iwasawaalgebra $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[T]]$, wobei $T+1$ wie ein fixiertes erzeugendes Element von $\mathbb{Z}_p = \text{Gal}(H_\infty/H)$ operiert. Hier ist $H_\infty = F_\chi(\mu_p)$ und L_∞ ist die maximale unverzweigte pro- p Erweiterung von H_∞ . Die Hauptvermutung besagt nun, dass das charakteristische Polynom der Operation mit T auf $X_{\bar{\psi}}^\omega$ das gleiche Ideal in $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\omega, \psi]$ erzeugt wie $G_\psi(u(1+T)^{-1} - 1)$. Hier sei $u \in \mathbb{Z}_p^\times = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ diejenige prinzipale Einheit, die durch den oben fixierten Erzeuger von $\text{Gal}(H_\infty/H)$ induziert wird.

Ziel des Oberseminars ist es zunächst im klassischen Fall $F = \mathbb{Q}$ die Kubota-Leopoldt p -adische L -Funktion zu konstruieren (Vorträge 1 – 4). Wir tun dies erstens ad hoc über die Reihenentwicklung bei $s = 1$ und zweitens nach Iwasawa über p -adische Maße, die von Stickelbergerelementen induziert werden. Als nächstes behandeln wir die elementare algebraische Theorie der $\mathbb{Z}_p$ -Erweiterungen von Zahlkörpern (Vorträge 5 + 6). Schließlich betrachten wir höhere Kummerkongruenzen und die Konstruktion der p -adischen L -Funktion über einem beliebigen total reellen Zahlkörper nach Deligne und Ribet [1] (Vorträge 7 – 10). Die Konstruktion von Deligne und Ribet basiert auf der Geometrie der Hilbert-Blumenthalschen Modulräume.

Vorträge

1. Vortrag: *Spezielle Werte von Dirichlet L -Funktionen*

Es sollen elementare Tatsachen über Dirichlet L -Funktionen, spezielle Werte und Bernoulli-Zahlen in Erinnerung gerufen werden; Kapitel 1 + 2 aus [2].

2. Vortrag: *Kubota-Leopoldt p -adische L -Funktionen*

Die Kubota-Leopoldt L -Funktionen soll ad hoc über ihre Reihenentwicklung definiert werden; Kapitel 3 aus [2].

3. Vortrag: *p -adische Maße I*

Zusammenhang zwischen Iwasawaalgebra und formalem Potenzreihenring kurz darstellen; Abschnitt 7.1 aus [3]. p -adische Maße einführen und die Kubota-Leopoldt L -Funktion als Integral schreiben; Abschnitte 12.1 und 12.2 aus [3] bis einschließlich Theorem 12.2.

4. Vortrag: *p -adische Maße II*

Rest von Abschnitt 12.2 aus [3] bis Corollary 12.6. Aus Abschnitt 7.2 das machen, was in Abschnitt 12.2 gebraucht wird. Schließlich Abschnitt 7.3 aus [3] ausführlich darstellen, am besten mit vollen Beweisen.

5. Vortrag: *$\mathbb{Z}_p$ -Erweiterungen*

Iwasawas Theorie der $\mathbb{Z}_p$ -Erweiterungen; Abschnitte 13.1 aus [3]. Strukturtheorie von $\mathbb{Z}_p[[T]]$ -Moduln; Abschnitte 13.2 aus [3].

6. Vortrag: *Iwasawas Satz über Klassenzahlen und die Hauptvermutung*

Es soll Iwasawas Satz über das Verhalten des p -primären Teils der Klassengruppe unter einer $\mathbb{Z}_p$ -Erweiterung bewiesen werden; Abschnitt 13.3 aus [3]. Es soll die Hauptvermutung für $F = \mathbb{Q}$ formuliert werden und es soll erklärt werden, warum es genügt für den Beweis der Hauptvermutung unverzweigte Erweiterungen von $\mathbb{Q}(\mu_{p^n})$ zu konstruieren; Abschnitt 13.6 aus [3].

7. Vortrag: *L-Funktionen und die Funktionalgleichung I*

In diesem und dem folgenden Vortrag sollen die von Deligne und Ribet benutzten L -Funktionen und ihre Funktionalgleichungen eingeführt werden; Abschnitte 1 – 3 aus [1].

8. Vortrag: *L-Funktionen und die Funktionalgleichung II*

Siehe Vortrag 7.

9. Vortrag: *Hilbertsche Modulformen*

Es sollen Hilbert-Blumenthalsche Modulräume und Hilbertsche Modulformen eingeführt werden; Abschnitte 4 + 5 aus [1].

10. Vortrag: *p -adische L -Funktionen*

Mit Hilfe von Eisensteinreihen sollen die höheren Kummerkongruenzen à la Deligne und Ribet gezeigt werden. Dies liefert die p -adische L -Funktion eines total reellen Zahlkörpers; Abschnitte 6 – 8 aus [1].

Literatur

- [1] Deligne, P.; Ribet, K. *Values of abelian L -functions at negative integers over totally real fields*. Invent. Math. 59 (1980), no. 3, 227–286.
- [2] Iwasawa, K. *Lectures on p -adic L -functions*. Annals of Mathematics Studies, No. 74., 1972.
- [3] Washington, L. *Introduction to cyclotomic fields*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 83., 1997.
- [4] Wiles, A. *The Iwasawa conjecture for totally real fields*. Ann. of Math. (2) 131 (1990), no. 3, 493–540.