

Die Weil Vermutungen (Weil II)

Beginn: 17. April 2008

Raum: M104

Zeit: Do., 14 - 16 Uhr

1 Einführung

Im Jahr 1949 hat André Weil [W₃] die folgenden Vermutungen aufgestellt:

“Let V be a variety without singular points, of dimension n , defined over a finite field k with q elements. Let N_v be the number of rational points on V over the extension k_v of k of degree v . Then we have

$$\sum_1^{\infty} N_v U^{v-1} = \frac{d}{dU} \log Z(U),$$

where $Z(U)$ is a rational function in U , satisfying a functional equation

$$Z\left(\frac{1}{q^n U}\right) = \pm q^{n\chi/2} U^{\chi} Z(U),$$

with χ equal to the Euler-Poincaré characteristic of V (intersectionnumber of the diagonal with itself on the product $V \times V$).

Furthermore, we have:

$$Z(U) = \frac{P_1(U)P_3(U) \cdots P_{2n-1}(U)}{P_0(U)P_2(U) \cdots P_{2n}(U)},$$

with $P_0(U) = 1 - U$, $P_{2n}(U) = 1 - q^n U$, and, for $1 \leq h \leq 2n - 1$:

$$P_h(U) = \prod_{i=1}^{B_h} (1 - \alpha_{h_i} U)$$

where the α_{h_i} are algebraic integers of absolute value $q^{h/2}$.

Finally, let us call the degrees B_h of the polynomials $P_h(U)$ the *Betti numbers* of the variety V ; the Euler-Poincaré characteristic χ is expressed by the usual formula

$\chi = \sum_h (-1)^h B_h$. The evidence at hand seems to suggest that, if $\bar{V}$ is a variety without singular points, defined over a field K of algebraic numbers, the Betti numbers of the varieties V_p , derived from $\bar{V}$ by reduction modulo a prime ideal p in K , are equal to the Betti numbers of $\bar{V}$ (considered as a variety over complex numbers) in the sense of combinatorial topology, for all except at most a finite number of prime ideals p ."

Unser Ziel in diesem Seminar besteht darin, diese Vermutungen von Weil zu beweisen. Dabei orientieren wir uns an dem Buch [KW]. Für Kurven hat Weil selbst seine Vermutungen in den Arbeiten [W1] und [W2] bewiesen. Mittlerweile gibt es einen elementaren Beweis für diesen Fall [B]. In höheren Dimensionen wurde die Rationalität und die Funktionalgleichung zuerst von Dwork [D3] bewiesen. Nur die Behauptung über die α_{h_i} war äußerst schwierig. Sie wird auch oft als *Riemannsche Vermutung für Varietäten* bezeichnet. Erst nach Entwicklung der etalen Kohomologie gelang es schließlich Deligne [D1] sie vollständig zu beweisen. Bald darauf veröffentlichte Deligne [D2] eine Arbeit, in der er einen viel allgemeineren Satz als die Riemannsche Vermutung bewies. Es ist dieser Satz, den wir hier beweisen wollen. Wenn man einmal die etale Kohomologie weit genug entwickelt hat, sind all die anderen Vermutungen formale Konsequenzen aus dieser Kohomologietheorie.

Wir werden zuerst die für den Beweis der Weil Vermutungen wichtigen Definitionen und Resultate der etalen Kohomologie (meist ohne Beweise) angeben und zeigen, wie daraus die Rationalität und die Funktionalgleichung folgen. Der Rest des Seminars beschäftigt sich dann mit dem Beweis von Delignes Hauptsatz aus [D2]. Dieser Beweis wurde von Laumon [L] vereinfacht, und es ist dieser vereinfachte Beweis, den wir verstehen wollen. In diesem Seminar konzentrieren wir uns auf den Fall von Kurven. Viele Resultate sind in höherer Dimension ebenfalls richtig, aber aus Zeitgründen werden wir nicht alle Resultate in voller Allgemeinheit beweisen können.

Als Referenz für die etale Kohomologie gibt es die Bücher [T] und [M2]. Außerdem gibt es noch ein Skript über etale Kohomologie und die Weil Vermutungen von Milne [M1]. Das Buch [FK] gibt den ersten Beweis von Deligne [D1] mit vielen Details wieder. Die Originalarbeiten über etale Kohomologie und die Weil Vermutungen bis auf die Riemannsche Vermutung findet man in [SGA4], [SGA4 $\frac{1}{2}$] und [SGA5].

2 Einteilung der Vorträge

ÜBERSICHTSVORTRAG (17.4.08) In diesem Vortrag soll die Notation für das Seminar festgelegt, die Weil Vermutungen formuliert und die Hasse-Weil Schranke bewiesen werden. Außerdem soll gezeigt werden, dass die Zetafunktion einer Kurve vom Geschlecht g schon vollständig durch die Werte $N_1, \dots, N_g$ festgelegt ist.

1. VORTRAG (24.4.08) **Etale Kohomologie**

Dieser Vortrag soll die wichtigsten Definitionen und Resultate über etale Kohomologie ohne Beweise zusammentragen. Alle Schemata sollen dabei noethersch und separiert sein. Die folgenden Begriffe sollen definiert und erklärt werden: etaler Morphismus, $ET(X)$, etale Garbe, etale Kohomologie [FK, § 2 bis Seite 20 Mitte], geometrischer Punkt, Halm einer etalen Garbe [FK, Seite

25 unten bis Seite 26 Mitte], lokal konstante und konstruierbare Garbe, Torsionsgarbe [FK, Definitionen 4.2, 4.3, 4.7 und Proposition 4.8], direkte und inverse Bilder, Erweiterung um Null [M1, Section 8], höhere direkte Bilder, Leray-Spektralfolge [M1, Section 12], Satz über eigentlichen Basiswechsel [M1, Theorem 17.7, Corollary 17.8(a) und Theorem 17.10], höhere direkte Bilder mit eigentlichem Träger, étale Kohomologie mit kompaktem Träger [M1, Section 18].

2. VORTRAG (8.5.08) **Garben von $\mathbf{Q}_\ell$ -Vektorräumen**

Kurz erklären, was die Fundamentalgruppe eines Schemas ist [FK, Appendix A I]. Dann sollen $\mathbf{Z}_\ell$ - und $\mathbf{Q}_\ell$ -Garben definiert werden [FK, § 12] und [M1, Section 19]. Diese Definition soll dann noch auf $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ ausgedehnt werden [KW, Appendix A bis Seite 330]. Insbesondere soll der Satz [FK, Proposition A I.8] und seine Verallgemeinerung in [KW, Seite 330] erwähnt werden. Es soll auch erklärt werden, wie die im 1. Vortrag definierten Funktoren in diesem Kontext definiert sind. Dann sollen noch die Weilgruppe $W(k/\kappa)$ und Weilgarben definiert werden [KW, I.1 bis einschließlich Proposition 1.3, aber ohne das Resultat von Grothendieck].

3. VORTRAG (15.5.08) **Rationalität und Funktionalgleichung**

Beweis der Rationalität und der Funktionalgleichung der Zetafunktion einer glatten und projektiven Varietät [H1, Appendix C 4] und [M1, Section 27]. Die benötigten Resultate aus der étalen Kohomologie (insbesondere Poincaré-Dualität und die Lefschetzsche Fixpunktformel) sollen nur zitiert werden. Ansonsten soll der Beweis vollständig sein. Zum Schluß sollen noch die Grothendieck-Spurformel [KW, Theorem 1.1] und die Verallgemeinerung [KW, Corollary 1.5] angegeben werden.

4. VORTRAG (29.5.08) **Gewichte 1**

Definition und Eigenschaften von Gewichten mit Beweisen [KW, Abschnitt I.2 bis einschließlich Lemma 2.7].

5. VORTRAG (5.6.08) **Gewichte 2**

Weitere Eigenschaften von Gewichten sollen gezeigt werden [KW, Theorem 2.8 bis Ende Abschnitt I.2]. Zumindest Fall 1 und 2 des Beweises von Theorem 2.16 sollen gegeben werden.

6. VORTRAG (12.6.08) **Determinantengewichte**

Inhalt ist Abschnitt I.3 von [KW]. Es sollen Theorem 3.1 + Corollary (zumindest für den Fall X_0 eine Kurve) gezeigt werden, Definition 3.2 gegeben und Theorem 3.3 bis Remark 3.7 sollen ohne Beweis erklärt werden, so dass Theorem 3.8 wieder bewiesen werden kann.

7. VORTRAG (19.6.08) **Reelle Garben**

Inhalt sind die Lemmata 4.1 und 4.2 und Theorem 7.1 aus [KW]. Für Theorem 7.1 braucht man Theorem 4.3 und Corollary 6.4. Beide sollen ohne Beweis verwendet werden.

8. VORTRAG (26.6.08) **Abgeleitete Kategorien**

Es soll erklärt werden, was die abgeleitete Kategorie einer abelschen Kategorie ist und was man in diesem Kontext unter einem abgeleiteten Funktor versteht und ein Paar Beispiele für abgeleitete Funktoren sollen angegeben werden [FK, Appendix A II] und [H2, Chapter 1]. Außerdem soll

noch die Kategorie $D_c^b(\mathbf{A}_0, \overline{\mathbf{Q}}_\ell)$ eingeführt werden [KW, Chap. 2 §5 und §6 und Appendix A Seite 330].

9. VORTRAG (3.7.08) **Die Fouriertransformation**

Inhalt ist Abschnitt 5 von [KW]. Der Beweis der Inversionsformel soll zumindest skizziert werden.

10. VORTRAG (10.7.08) **Beweis der Weil Vermutungen für Kurven**

Es soll Theorem 6.1 aus [KW] bewiesen und - wenn noch Zeit bleibt - Corollary 6.4 zumindest für den Fall einer Kurve gezeigt werden.

PROGRAMMDISKUSSION (17.7.08)

Literatur

- [B] Enrico Bombieri, *Counting points on curves over finite fields (d'après S. A. Stepanov)*, 1974, pp. 234–241. Lecture Notes in Math., Vol. 383. Séminaire Bourbaki, 25ème année (1972/1973), Exp. No. 430.
- [D1] Pierre Deligne, *La conjecture de Weil. I*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **43** (1974), 273–307.
- [D2] ———, *La conjecture de Weil. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **52** (1980), 137–252.
- [D3] Bernard Dwork, *On the rationality of the zeta function of an algebraic variety*, Amer. J. Math. **82** (1960), 631–648.
- [FK] Eberhard Freitag and Reinhardt Kiehl, *Étale cohomology and the Weil conjecture*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 13, Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the German by Betty S. Waterhouse and William C. Waterhouse, With an historical introduction by J. A. Dieudonné.
- [H1] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [H2] ———, *Residues and Duality*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag, Heidelberg, 1966.
- [KW] Reinhardt Kiehl and Rainer Weissauer, *Weil conjectures, perverse sheaves and l'adic Fourier transform*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., vol. 42, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [L] G. Laumon, *Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **65** (1987), 131–210.
- [M1] James S. Milne, *Lectures on étale cohomology*. Lecture Notes, <http://www.jmilne.org/math/>.
- [M2] ———, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [SGA4] A. Grothendieck, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269.
- [SGA4 $\frac{1}{2}$] P. Deligne, *Cohomologie étale*, Springer-Verlag, Berlin, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA 4 $\frac{1}{2}$, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569.

- [SGA5] A. Grothendieck, *Cohomologie l -adique et fonctions L* , Springer-Verlag, Berlin, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1965–1966 (SGA 5), Edité par Luc Illusie, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 589.
- [T] Günter Tamme, *Introduction to étale cohomology*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1994. Translated from the German by Manfred Kolster.
- [W₁] André Weil, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Actualités Sci. Ind., no. 1041 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg **7** (1945), Hermann et Cie., Paris, 1948.
- [W₂] ———, *Variétés abéliennes et courbes algébriques*, Actualités Sci. Ind., no. 1064 = Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg **8** (1946), Hermann & Cie., Paris, 1948.
- [W₃] ———, *Numbers of solutions of equations in finite fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 497–508.