

Oberseminar über Arithmetische Geometrie

Zeit: Do 14-16 c.t.,

Ort: M104

Thema: **Algebraische Singuläre (Ko)Homologie**

In diesem Oberseminar werden die Vorträge 11 bis 13 des Oberseminars über "Klassenkörpertheorie arithmetischer Schemata" sowie ergänzend der Artikel "Singular Homology of Abstract Algebraic Varieties" von Andreij Suslin und Vladimir Voevodsky behandelt.

• **Singuläre Homologie - Wozu?**

Beilinson und Lichtenbaum haben zu Beginn der 80er Jahre ein umfassendes Programm für eine vermutete motivische Kohomologietheorie entwickelt, deren Beziehung zur algebraischen respektive étalen K-Theorie der Beziehung zwischen topologischer singulärer Kohomologie und K-Theorie entsprechen sollte (Atiyah-Hirzebruch- Spektralsequenz). Insbesondere sollte Zariski-motivische Kohomologie mit endlichen Koeffizienten von glatten Varietäten über algebraisch abgeschlossenen Körpern mit étaler Kohomologie in gewissen Graden übereinstimmen. Ein solcher Isomorphismus wurde für Blochs höhere Chowgruppen ad hoc mit Hilfe von Suslins algebraischer singulärer Homologie und Voevodskys h-Topologie konstruiert.

• **Definition der singulären (Ko)Homologie:**

Im folgenden sei k ein beliebiger Körper und $\mathcal{S} = \mathcal{S}_k$ die Kategorie der Schemata von endlichem Typ über $\text{Spec } k$. Vereinfachthaber wollen wir die zugrundeliegenden Objekte kurz "Schemata" nennen. Zu einem Schema X betrachten wir die Gruppe $C^p(X) = \text{Cor}_f(\Delta^p, X)$ aller endlichen Korrespondenzen, i.e. die frei erzeugte abelsche Gruppe über alle abgeschlossenen integeren Unterschemata $V \subset \Delta^p \times X$ die endlich und surjektiv über Δ^p liegen. Hierbei sei $\Delta^p = \text{Spec } k[T_0, \dots, T_p] / \sum T^i - 1$ der " p -te Standard-Simplex" genannt. Vermöge

den Randabbildungen $\partial_i : \Delta^{p-1} \rightarrow \Delta^p$ wird $C^*(X)$ zu einer simplizialen abelschen Gruppe und wir setzen $H_*^{sing}(X)$ gleich ihrer Homotopie, also der Homologie des Komplexes $C^p(X), \delta = \sum (-1)^i \partial_i^*$. Darüberhinaus erhält man die singuläre Homologie und Kohomologie mit beliebigen Koeffizienten durch Setzen von $H_*^{sing}(X, A) = H_*(C(X) \otimes^{\mathbb{L}} A)$ bzw. $H_{sing}^*(X, A) = H_*(\mathbb{R}\mathrm{Hom}(C(X), A))$.

Im quasi-projektiven Fall erhält man auch die singuläre (Ko)Homologie über die simpliziale abelsche Gruppe $\tilde{C}(X) = \mathrm{Hom}_S(\Delta^*, \coprod_{d \geq 0} S^d X)^+$, wobei $S^d X$ das d -fache symmetrische Produkt und "+" die (naive) Gruppenkomplettierung eines abelschen Monoids bezeichnet. Dieses, in [SV] bewiesene, Resultat steht in Analogie zu dem klassischen Dold-Thom-Theorem, welches man durch Ersetzen von X durch einen CW -Komplex, Hom_S durch Hom_{top} sowie Δ^* durch den gewöhnlichen Standard-Simplex der Topologie, erhält.

• Resultate, die in den Vorträgen bewiesen werden:

Das Hauptresultat des Artikels [SV] ist die Isomorphie

$$H_{sing}^*(X, \mathbb{Z}/n) \cong H_{et}^*(X, \mathbb{Z}/n) \quad (1)$$

für separierte Schemata und n -wie so oft- prim zur Charakteristik des Grundkörpers. Für den Beweis werden in [SV] originelle Methoden entwickelt: Zum einen wird für die Auflösung von Singularitäten eine feinere Topologie als die étale, nämlich die (qfh und) h -Topologie benötigt. Überdeckungen sind hier alle (quasi-endlichen) Morphismen $f : X \rightarrow Y$, so dass Y als Zariski-topologischer Raum die Quotiententopologie von f trägt.

Zum anderen werden wir Prägarben mit Transfer studieren - eine Verallgemeinerung der additiven Prägarben auf der Kategorie Cor_k aller glatten Schemata deren Morphismen durch endliche Korrespondenzen gegeben sind. In diesem Zusammenhang werden wir Begriffe wie Homotopie und Starrheit und deren elegante Anwendung im Beweis kennenlernen. Das Dold-Thom-Theorem in seiner algebraischen und topologischen Fassung wird zusammen mit étaler Kohomologie benutzt, um die Gleichheit

$$H_*^{sing}(X, \mathbb{Z}/n) = H_*^{top-sing}(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n) \quad (2)$$

im Falle separierter quasi-projektiver $\mathbb{C}$ -Schemata zu zeigen.

Aus $H_{sing-top}^1(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/n) = H_{et}^1(X, \mathbb{Z}/n)$ liest man sofort ab, dass die endlichen Quotienten der abelsierten topologischen und étalen Fundamentalgruppe gleich sind. Wir benutzen aber gerade diesen Zusammenhang zwischen den endlichen étalen und endlichen topologischen Überlagerungen, um (2) mittels étaler Kohomologie zu beweisen.

Vortrag 1:
Übersichtsvortrag

Die Beilinson-Lichtenbaum Vermutung und deren Zusammenhang mit der singulären Homologie nach Suslin werden erläutert. Anschließend werden die Vortragsthemen kurz durchgegangen und an die Seminarteilnehmer verteilt.

19.04. Moritz Kerz

Vortrag 2:
Wiesends höherdimensionale Klassenkörpertheorie

Fortführung des Oberseminars "KKT Arithmetischer Schemata", Vortrag 11

26.04., 03.05. Stefanie Knorr

Vortrag 3:
Algebraische Singuläre Homologie

Hier soll die (relative) singuläre Homologie $H_i^{sing}(X, S)$ für S irreduzibel und X/S beliebig definiert werden ([SV] Abschnitt 3, Anfang); für $S = \text{Spec } k$ erhält man die gewöhnliche singuläre Homologie $H_i^{sing}(X)$. Man zeige die Funktorialität für S -Morphismen und die Konfunktorialität für endlich-flache S -Morphismen (vgl. z.B. [MVW] Lemma 1.4, [F] 1.5 + 1.7 sowie [Sc]) und berechne die singuläre Kohomologie für relative glatte Kurven über normalen Schemata ([SV]-Abschnitt 2,3, bzw. [Sc] Theorem 3.5).

10.05.

Vortrag 4:
h-, qfh- und étale Topologie

Hier sollen zunächst h- und qfh-Überlagerungen definiert und dazu einige Beispiele angegeben werden ([V]-Abschnitt 3 incl. Prop 3.1.3 ohne Beweis). Als wichtig stellt sich das Theorem 3.1.8 "platification par éclatement" in [V] heraus, denn hierdurch ergibt sich, dass h-Überdeckungen eines normalen Schemas durch "Überdeckung von normaler Form" verfeinert werden können. Ziel des Vortrags soll es sein, die Vergleichstheoreme 10.2 und 10.7 und das wichtige Resultat Kor 10.10 in [SV] zu beweisen. Wir erhalten hieraus die Äquivalenz der h-, qfh- und étalen Kohomologie mit endlichen Koeffizienten.

24.05.

Vortrag 5:

Starrheit für Homotopie-invariante Prägarben mit Transfer

Hier soll zunächst der Begriff der Prägarbe mit Transfer definiert und die Starrheit solcher Prägarben gezeigt werden ([SV] - Abschnitt 4). Das wichtige Resultat für die étale, h - und qfh -Kohomologie ([SV] Theorem 4.5) ist für k von beliebiger Charakteristik prim zu n gültig. Hierzu ist der Beweis etwas abzuändern: Ist $X \in Sch/k$, beliebig, so existiert eine h -Überdeckung $Y \rightarrow X$ durch ein glattes k -Schema. Eine Möglichkeit bietet die Alteration algebraischer Varietäten nach de Jong (vgl. [DJ] oder [B]).

Im nachfolgenden Vortrag wird gezeigt, dass qfh -Garben Transferabbildungen besitzen. Hierzu sollen schon vorneweg Pseudo-Galois-Überlagerungen definiert und charakterisiert ([SV] Abschnitt 5 bis Cor 5.8), sowie mittels dem zu beweisenden Lemma 5.16 in [SV] die Transferabbildungen für qfh -Garben konstruiert werden.

31.05.

Vortrag 6:

Verallgemeinerte Multiplizitäten

Zunächst sollen die Multiplizitäten der Serre'schen Tor-Formel (vgl. [MVW] 17.A bzw. [S] V-C) mittels Pseudo-Galois-Überlagerungen verallgemeinert werden (weiter Abschnitt 5 - [SV]). Im nicht-regulären Fall können bei diesen Multiplizitäten Potenzen der Charakteristik des Grundkörpers im Nenner auftreten. Dies soll an dem vorgegeben Beispiel erläutert werden. Ferner soll für den nachfolgenden Vortrag die Multiplizität im Falle eines normalen Schemas berechnet werden (Lemma 6.5). Mit der verallgemeinerten Multiplizität lässt sich nun die Transfereigenschaft der qfh -Garben nachweisen (Rest von Abschnitt 5 in [SV]).

14.06.

Vortrag 7:

Das algebraische und topologische Dold-Thom-Theorem

Zunächst soll das topologische Dold-Thom-Theorem in seiner ursprünglichen Version (vgl. [DT]) sowie die äquivalente Formulierung in [SV] -Theorem 8.2 angegeben werden. Schön wäre, wenn der Vortragende den Zusammenhang kurz erläutern könnte.(Hierzu benötigt man etwas Kenntnisse in simplizialer Homotopie und Homologie (vgl. z.B.[W] 8.1.-8.3.)

Anschließend soll die qfh -Garbe der Zyklen $Z_0^c(X)$ studiert werden: Ist X separiert, so ist diese Garbe vermöge $X' \mapsto \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]\{\mathrm{Hom}(X', X)\}$ darstellbar - dies wird die wesentliche Zutat für

den Beweis der Gleichheit étaler und singulärer Kohomologie mit endlichen Koeffizienten sein. Im zweiten Teil des Vortrags betrachten wir nur quasiprojektive k -Schemata. Für jene sollen nun symmetrische Produkte gemäß [SV] Abschnitt 6 eingeführt werden und die algebraische Version des Dold-Thom-Theorems ([SV] Theorem 6.8) formuliert werden.

Zuletzt soll die singuläre (Ko)Homologie für abelsche Prägarben mit beliebigen Koeffizienten definiert ([SV] Abschnitt 7-Anfang) werden. Setzt man in diese Definition die Prägarbe $Z_0^e(X)$ ein, so erhält man die singuläre (Ko)Homologie von X . Hieraus folgere man sodann für n prim zu $ch(k)$:

$$H_*^{sing}(X, \mathbb{Z}/n) = H_*(\text{Hom}(\Delta, \prod_{d=0}^{\infty} S^d X)^+ \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/n)$$

21.06.

Vortrag 8:

Vergleich étaler, algebraisch-singulärer und topologisch-singulärer (Ko)Homologie

Mit den Resultaten aus Vortrag 4 und 6 und der Azyklizität kontrahierbarer Garben zeige man $H_{sing}^*(X, \mathbb{Z}/n) = H_{et}^*(X, \mathbb{Z}/n)$ für X separiert und n prim zu $ch(k)$ ([SV] Abschnitt 7-Rest). Anschließend soll aus den Dold-Thom-Theoremen die Gleichheit der algebraischen und topologischen singulären (Ko)Homologie (mit endlichen Koeffizienten) für quasiprojektive $\mathbb{C}$ -Schemata gefolgert werden. Die Quasiprojektivität wird hier benötigt, da für solche Schemata das symmetrische Produkt und eine CW-Struktur auf dem zugrundeliegenden komplexen topologischen Raum existiert (vgl. hierzu [H]). Ferner wird das Vergleichstheorem für die étale und klassische Garbenkohomologie mit endlichen Koeffizienten benötigt (vgl. [SGA4] XVI Théorème 4.1).

28.06.

Vortrag 9:

singuläre Homologie arithmetischer Schemata

Oberseminar "KKT arithmetischer Schemata" - Vortrag 12

28.06. Volker Neumaier

Vortrag 10:
Folgerung aus Wiesends höherdimensionaler KKT

Oberseminar "KKT arithmetischer Schemata" - Vortrag 13

05.07.

Puffertermin 12.07., Programmdiskussion 19.07.

Literatur

- [B] P. Berthelot , Alterations de Variétés Algébriques, Astérisque (1997), no. 241, Exp. 815, 5, 273-311, Séminaire Bourbaki, vol 1995/96
- [DJ] A.J. de Jong, Smoothness, Semi-stability and Alterations, Preprint 916, University Utrecht (1995)
- [DT] A. Dold, R. Thom, Quasifaserungen und Unendliche Symmetrische Produkte, Ann. Math 67 (1956)
- [F] W. Fulton, Intersection Theory - Sec. Ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1998
- [H] H. Hironaka, Triangulations of Algebraic Sets, Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol 29), 1975
- [MVW] C.Mazza, V.Voevodsky, C.A. Weibel, Lecture Notes on Motivic Cohomology, Preprint (2004) <http://www.math.rutgers.edu/~weibel/motiviclectures.html>
- [S] J.P.Serre, Algèbre Locale Multiplicités, Lecture Notes in Math 11, 1965
- [Sc] A. Schmidt, Singular Homology of Arithmetic Schemes, Preprint 2000
- [SGA4] M.Artin, A.Grothendieck, J.L.Verdier, Theorie de Topos et Cohomologie Etale des Schemas, Lecture Notes in Math 269,270,305 ,(1972-1973)
- [SV] A. Suslin, V. Voevodsky, Singular Homology of Abstract Algebraic Varieties, Invent math 123 (1996)
- [V] V.Voevodsky, Homology of Schemes, Selecta mathematicae 2 - 1996
- [W] C.A. Weibel, An Introduction to Homological Algebra, Cambridge University Press 1994