

Oberseminar “Eisensteinideal”

Ziel des Oberseminars soll es sein, die wichtigsten Methoden und Resultate aus B. Mazurs Arbeit über das Eisensteinideal zu verstehen [14].

Der folgende Programmvorschlag deckt alle technischen Resultate aus [14] mit Ausnahme der Kontrolle von $J_0(N)(\mathbb{Q})[2]$ ab. Die wichtigsten Anwendungen werden behandelt (zum Teil nach [15]) mit der bedauerlichen Ausnahme von p -adischen L -Reihen.

Falls gewünscht, können die Vorträge 1),2) bzw. 3),4) zu jeweils einem (Übersichts)vortrag zusammengefasst werden.

nützliche Vorkenntnisse: [27],[28],[18],[17],[23],[2],[9].

Übersichtsartikel: [12],[13].

Vorträge

1) (Reduktion von Jacobischen)

Kurzer Überblick über minimale Modelle arithmetischer Flächen ([5]) und Néron-Modelle abelscher Varietäten ([1], insbesondere: Struktur der speziellen Faser, [4], 7.3, Lemma 2c), Kriterium von Néron-Ogg-Shafarevich und Analogon im semi-abelschen Fall,[16],[4]). Jacobische einer semi-stabilen Kurve ([4] 9.2/8) und ihre Komponentengruppe ([4] 9.6/1 und [3]).

Bei der Materialauswahl (gerade im “Übersichtsteil”) sollte man sich an Vortrag 2) orientieren.

2) (Reduktion von $J_0(N)/\mathbb{Q}$)

Beweis der Resultate aus [14], Anhang, genauer (nur für N prim, i.e. $\nu = 0$ in *loc. cit.*): $J_0(N)$ hat bei N vollständig torische Reduktion, der Frobenius auf dem Torus ist bekannt und die Komponentengruppe ist zyklisch von bekannter Ordnung, erzeugt von $(0) - (\infty)$.

Nach Vortrag 1) ist die wesentliche Information [11], S. 417; man sollte eine Idee des Beweises bekommen (Drinfel'd-Strukturen).

Eventuell Vergleich der Konstruktionen aus [8] und [11] wie in [6] und minimale Modelle in allgemeineren Fällen [10].

3) (zulässige Gruppen I) [14], I. 1-2.

Quasi-endliche étale Gruppen als Galois-Moduln (I.1,a) vgl. [19], II. 3.12), Beweis von I.,1.7 (Schranke für H_{fppf}^1). Möglicherweise kann man den Beweis von I., 2.1 ($Ext_{\mathbb{Z}}^1(\mu_p, \mathbb{Z}/p) = 0$) mit den Methoden aus [24], Corollary 2.4 abkürzen, sonst reicht die Zeit wohl nur für eine Beweisskizze.

4) (zulässige Gruppen II) [14], I. 3-5.

Hier sind besonders wichtig (3.4), (3.5) und (4.5) (Strukturkriterien für zulässige Gruppen). Wir sollten die Gruppe D aus I.4 im Detail verstehen, ebenso (4.6). Bei Zeitmangel genügt es, die Resultate aus I.5 ohne Beweis anzugeben.

5) (Modulkurven) [14], II. 1-3.

Fast alles aus II. 1 sollte schon in Vortrag 2) gesagt worden sein. In II.2 geht es um die lokale Struktur von $X_1(N) \rightarrow X_0(N)$ in beliebiger Charakteristik (über $\mathbb{C}$ ist diese Überlagerung genau an den elliptischen Fixpunkten verzweigt, vgl. [20], z.B auch für das Verhalten der Spitzen). In (2.3) sollte man (für später) bemerken, dass die Shimura-Überlagerung sogar maximal étale ist. In II.3 werden reguläre Differentiale behandelt, siehe auch [7], Anhang. Es wäre interessant, den Beweis für die angegebene Struktur der regulären Differentiale auf einer semi-stabilen Kurve zu sehen.

6) (Modulformen I) [14], II. 4.

Die Referenz “Serre [47]” meint vermutlich [25]. Hier geht es um den Vergleich verschiedener Begriffe von Modulformen über (fast) beliebigen Basen, die über $\mathbb{C}$ alle äquivalent sind.

7) (Modulformen II) [14], II. 5.

Hier kommen die subtilen arithmetischen Resultate über Modulformen, die die Struktur der Hecke-Algebra regieren, insbesondere 5.5 und 5.12.

8) (Die Hecke-Algebra und das Eisensteinideal) [14], II. 6-9.

In II.6/7 stehen nur Vorkenntnisse, es genügt also, die Definitionen anzugeben; man sollte aber klären, warum die Hecke-Operatoren “überall” selbst-adjungiert operieren. In II.9 kommen dann zentrale Resultate: $H^1(X_0(N)_{\mathbb{Z}}, \mathcal{O})$ ist lokal frei vom Rang eins über $\mathbb{T}$ (9.4), $\mathbb{T} = \text{End}_{\mathbb{C}}(J_0(N)_{\mathbb{C}})$ (9.5) und $\mathbb{T}/\mathcal{I} \simeq \mathbb{Z}/n$ (9.7). Wenn Zeit bleibt, sollten die Resultate aus [21] erklärt werden.

9) (Die kuspide und die Shimura-Untergruppe) [14], II. 10-12.

Den Beweis von (10.6) ($\text{Spec}(\mathbb{T})$ ist zusammenhängend) sollten wir im Detail verstehen. Für II.11 ist es sicher interessant, zunächst [20] anzuschauen, wo die Ideen “über $\mathbb{C}$ ” schon stehen. Für den Beweis von (11.7) (die Shimura-Untergruppe ist Eisenstein) vergleiche [22]. Die Frage auf Seite 101 wird in [26] beantwortet. Den letzten Abschnitt von II.11 können wir ignorieren. Stellen Sie die wichtigsten Ergebnisse aus II.12 (nämlich 12.5 und 12.6) ohne Beweis vor.

10) (Galois-Darstellungen) [14], II. 14.

Struktur der Galois-Moduln $J_0(N)[\mathcal{M}](\overline{\mathbb{Q}})$ (2-dimensional über $k_{\mathcal{M}}$ und irreduzibel genau dann, wenn $\mathcal{M}$ nicht Eisenstein ist).

11) (Gorensteinbedingung) [14] II, 15-16.

Lemma (15.1) muss durch den Anhang von [29] ersetzt werden. Hauptresultate sind (15.1) (Bedeutung der Gorensteinbedingung an $\mathbb{T}$ für die Galois-Darstellungen aus Vortrag 10)) und (16.6) (das Eisensteinideal ist lokales Hauptideal). Soviel sollte bewiesen werden, die “ganze Wahrheit” steht in (18.10).

12) (Mordell-Weil Gruppen) [14] III., 1,3 (und 7).

Torsion in Faktoren von J , $J(\mathbb{Q})^{\text{tor}} = C$ (Vermutung von Ogg), $C \simeq \tilde{J}(\mathbb{Q})$, der $\mathcal{P}$ -Teil der Tate-Shafarevich-Gruppe verschwindet. Wenn Zeit bleibt, wäre (7.3) noch ganz nett (Existenz von absolut einfachen $A/\mathbb{Q}$ vom Rang null).

13) (Torsionspunkte auf elliptischen Kurven über $\mathbb{Q}$)

Beweisen Sie Theorem 4.1 aus [15]: §1, Korollar 1.1 (eine Exaktheitseigenschaft des Néron-Modells, vgl. [4] 7.5). In §2 können wir uns auf N prim beschränken, womit §2,a),b) entfallen ($J_0(N)^{\text{new}}$), von Proposition 2.1 haben wir bereits eine Verschärfung gezeigt. Entscheidend ist Proposition 3.1 ($X_0(N) \rightarrow \tilde{J}$ ist formale Immersion bei ∞). Man erhält dann sofort Korollar 4.4 (potentiell gute Reduktion durch Existenz rationaler Isogenien) und das Hauptergebnis. Wenn Zeit bleibt, einen Überblick über die “known previous results” aus der Bemerkung auf Seite 146 geben.

Literatur

- [1] M. Artin, Néron models, Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984), 213–230, Springer, New York, 1986.
- [2] A.O. Atkin, J. Lehner, Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. **185** (1970), 134–160.
- [3] S. Bosch, D. Lorenzini, Grothendieck’s pairing on component groups of Jacobians, Invent. Math. **148** (2002), no. 2, 353–396.
- [4] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud, Néron models, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [5] T. Chinburg, Minimal models for curves over Dedekind rings, Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984), 309–326, Springer, New York, 1986.
- [6] B. Conrad, Arithmetic moduli of generalized elliptic curves, www.math.lsa.umich.edu/~bdconrad/
- [7] B. Conrad, Grothendieck duality and base change, Lecture Notes in Mathematics **1750**, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

- [8] P. Deligne, M. Rapoport, Les schémas de modules de courbes elliptiques. (French) Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 143–316. Lecture Notes in Math., Vol. **349**, Springer, Berlin, 1973.
- [9] M. Demazure, Lectures on p -divisible groups, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **302**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [10] B. Edixhoven, Minimal resolution and stable reduction of $X_0(N)$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **40** (1990), no. **1**, 31–67.
- [11] N. Katz, B. Mazur, Arithmetic moduli of elliptic curves, Annals of Mathematics Studies, **108**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.
- [12] B. Mazur, J-P. Serre, Points rationnels des courbes modulaires $X_0(N)$ (d’après A. Ogg), Séminaire Bourbaki (1974/1975), Exp. No. **469**, pp. 238–255, Lecture Notes in Math., Vol. **514**, Springer, Berlin, 1976.
- [13] B. Mazur, p -adic analytic number theory of elliptic curves and Abelian varieties over $\mathbb{Q}$, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974), Vol. **1**, pp. 369–377.
- [14] B. Mazur, Modular curves and the Eisenstein ideal, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **47**, (1977), 33–186.
- [15] B. Mazur, Rational isogenies of prime degree (with an appendix by D. Goldfeld), Invent. Math. **44** (1978), no. 2, 129–162.
- [16] J-P. Serre, J. Tate, Good reduction of abelian varieties, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 492–517.
- [17] J.S. Milne, Jacobian varieties, Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984), 167–212, Springer, New York, 1986.
- [18] J.S. Milne, Abelian varieties, Arithmetic geometry (Storrs, Conn., 1984), 103–150, Springer, New York, 1986.
- [19] J. Milne, Étale cohomology, Princeton Mathematical Series, **33**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [20] A.P. Ogg, Rational points on certain elliptic modular curves, Analytic number theory (Proc. Sympos. Pure Math., Vol XXIV, St. Louis Univ., St. Louis, Mo., 1972), pp. 221–231. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.
- [21] K. Ribet, Endomorphisms of semi-stable abelian varieties over number fields, Ann. Math. (2) **101** (1975), 555–562.

- [22] K. Ribet, On the component groups and the Shimura subgroup of $J_0(N)$, Séminaire de Théorie des Nombres, 1987–1988 (Talence, 1987–1988), Exp. No. 6.
- [23] D. Rohrlich, Modular curves, Hecke correspondence, and L -functions, Modular forms and Fermat’s last theorem (Boston, MA, 1995), 41–100, Springer, New York, 1997.
- [24] R. Schoof, Abelian varieties over cyclotomic fields with good reduction everywhere, Math. Ann. **325** (2003), no. 3, 413–448.
- [25] J-P. Serre, Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques (French) Modular functions of one variable, III (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972), pp. 191–268. Lecture Notes in Math., Vol. **350**, Springer, Berlin, 1973.
- [26] E. de Shalit, A note on the Shimura subgroup of $J_0(p)$, J. Number Theory **46** (1994), no. 1, 100–107.
- [27] J. Tate, Finite flat group schemes, Modular forms and Fermat’s last theorem (Boston, MA, 1995), 121–154, Springer, New York, 1997.
- [28] J. Tate, p -divisible groups, 1967 Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966) pp. 158–183, Springer, Berlin.
- [29] J. Tilouine, Hecke algebras and the Gorenstein property, Modular forms and Fermat’s last theorem (Boston, MA, 1995), 327–342, Springer, New York, 1997.