

Kohomologie von Arithmetischen Gruppen (nach Borel)

Oberseminar Algebraische Geometrie – Wintersemester 2006/07

Im Oberseminar werden wir uns mit Borels Artikel [Bor74] beschäftigen. In diesem Artikel wird die Kohomologie von arithmetischen Untergruppen Γ in halb-einfachen Gruppen G berechnet, indem man die Operation von Γ auf dem symmetrischen Raum $G(\mathbb{R})/K$ der maximal kompakten Untergruppen in der Lie-Gruppe $G(\mathbb{R})$ untersucht. Für die differentialgeometrische Analyse der Mannigfaltigkeit $X = \Gamma \backslash G(\mathbb{R})/K$ wird es nötig, bestimmte Kompaktifizierungen von X zu betrachten, die die Struktur von Mannigfaltigkeiten mit Ecken besitzen. Die Hauptarbeit liegt dann in dem Beweis eines L^2 -Kriteriums für Differentialformen auf X , die ein bestimmtes Wachstumsverhalten an den Ecken zeigen. Aus diesem Kriterium kann man ableiten, dass in einem von der Struktur der Lie-Gruppe abhängigen Bereich die Kohomologie der arithmetischen Untergruppe Γ durch einen Komplex von Differentialformen auf X beschrieben wird.

In einem Vertiefungsteil werden wir uns mit verschiedenen algebraischen Konsequenzen dieses Ergebnisses auseinandersetzen. Zur Auswahl stehen derzeit die Beziehung zu Regulatoren, zu Werten von L-Funktionen sowie die Berechnung der rationalen K-Theorie von Zahlringen.

Voraussetzungen Grundlagen Topologie, Differentialgeometrie, Algebra.

Liste der Vortragsthemen:

1. **Einführung, Übersicht, Verteilung der Vorträge**
2. **Bott-Periodizität:** Berechnung der Homotopie und Kohomologie der klassischen Gruppen. Die klassische Referenz ist [Bot59]. Das deckt den Abschnitt 10 in [Bor74] ab. Wichtig ist die Erklärung der Tabelle und wie sie zustande kommt. Beim Beweis kann man sich auf den Spezialfall $SL_n(\mathbb{R})$ bzw. $SL_n(\mathbb{C})$ beschränken. Teile der Theorie (und wahrscheinlich ein guter Überblick) finden sich in [Bur02, Kapitel 4].
3. **Kohomologie von Arithmetischen Untergruppen:** In diesem Vortrag soll Abschnitt 11 von Borel vorgestellt werden, unter Annahme von Theorem 11.1 (das eine direkte Konsequenz von Theorem 7.5. ist). Wichtig ist, wie die arithmetischen Gruppen $SL_n(\mathcal{O}_L)$ in die klassischen Gruppen eingebettet werden.
4. **Definition von j^* :** Vorstellung des Anfangs von Abschnitt 3 in Borel. Der Morphismus $j^* : I_G^F \rightarrow H^*(\Gamma)$ soll definiert werden. Einige Begriffe sollten in diesem Zuge wiederholt werden, zum Beispiel die relative Kohomologie von Lie-Algebren. Dazu kann [BW00, Kapitel I,II] oder [Bur02, Kapitel 5] als Referenz benutzt werden. Auch die Notation in Abschnitt 3.3 von Borel sollte erläutert werden. Für die klassische Chern-Weil Theorie kann [Dup78] zu Rate gezogen werden.
5. **Injektivität und Surjektivität von j^* :** Vorstellung des zweiten Teils von Abschnitt 3, die Ergebnisse von Garland und Matsushima. Insbesondere sollen die Konstanten $c(G)$ und $m(G(\mathbb{R}))$ definiert werden, auch deren Werte (Abschnitt

9) mindestens für die Wurzelsysteme A_n und B_n sollen angegeben werden. Dann Formulierung von Theorem 7.5, dessen Beweis die folgenden Vorträge ausfüllt.

6. **Algebraische Gruppen und Zerlegung der Metrik:** In diesem Vortrag soll Abschnitt 4 von Borel vorgestellt werden. Darin geht es um eine Zerlegung der Metrik auf dem homogenen Raum $G(\mathbb{R})/K$ der maximalen kompakten Untergruppen von $G(\mathbb{R})$. Diese Zerlegung folgt aus gruppentheoretischen Zerlegungen zu parabolischen Untergruppen in G . Dazu ist es notwendig, Definitionen und Ergebnisse aus [BS73, Abschnitte 1, 4] einzubeziehen.
7. **Mannigfaltigkeiten mit Ecken (I):** Hier soll Abschnitt 6 vorgestellt werden. Wichtig hierbei ist, wie der Raum $X = G(\mathbb{R})/K$ kompaktifiziert werden kann, sowie die Beziehung der Ecken von $\overline{X}/\Gamma$ zu parabolischen Untergruppen von G . Ausserdem brauchen wir die Begriffe von Siegel-Mengen und speziellen Umgebungen der Ecken. Auch hier ist es notwendig, [BS73, Abschnitte 5-7, 10] einzubeziehen.
8. **Mannigfaltigkeiten mit Ecken (II):** Fortsetzung.
9. **Beweis von Theorem 7.4 (I):** Vorstellung des Anfangs von Abschnitt 7, das ist zum Teil Einführung von Notation, Formulierung von Theorem 7.4. Ausserdem soll Teil (b) von Theorem 7.4. bewiesen werden, dies ist der Inhalt von Abschnitt 5.
10. **Beweis von Theorem 7.4 (II):** Fortsetzung des Beweises von Theorem 7.4, Teil (a) sowie die Folgerungen 7.5, 7.6 und 11.1.

Die Vertiefungsthemen sowie deren Umfang hängen davon ab, ob sich jemand bereit findet, die entsprechenden Vorträge zu übernehmen.

Mögliche Vertiefungsthemen:

11. **Beziehung zur K-Theorie:** Wiederholung der $BGL(R)^+$ -Konstruktion der algebraischen K-Theorie, Plus-Konstruktion nach Quillen. Referenz hierfür könnte [Ros94, Kapitel 5.2] sein. Kurzer Überblick über den Satz von Cartan-Serre [FHT01], d.h. den Isomorphismus

$$\pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q} \cong PH_*(\Omega X, \mathbb{Q}).$$

Damit kann dann der Abschnitt 12 aus [Bor74] vorgestellt werden, der die K-Theorie durch Gruppenhomologie ausdrückt.

12. **Werte von L-Funktionen:** Es soll ein Überblick über die Definition des Borel-Regulators gegeben werden. Das kann sich an [Bur02, Kapitel 9] oder [Bor77] orientieren. Dazu sollten das kompakte Dual der Lie-Gruppe $G(\mathbb{R})$ sowie die stetige Kohomologie eingeführt werden.
13. **Beilinson-Regulator:** Auch in diesem Vortrag sollte ein *Überblick* über die Fragestellungen gegeben werden, die für einen Vergleich der Regulatoren von Beilinson und Borel relevant sind. Dazu gehören eine Definition von Deligne-Beilinson-Kohomologie und eine Beschreibung des van Est-Isomorphismus. Die minimalen Modelle der rationalen Homotopietheorie sollten als technisches Detail nur am Rande erwähnt werden. Die relevante Literatur ist wieder [Bur02] sowie [Rap88].

Der erste Vortrag wird am 10. Oktober 2006 um 15:30 Uhr im Felix-Klein-Hörsaal, Johannisgasse, stattfinden.

Kontakt:

Annette Huber-Klawitter, huber@math.uni-leipzig.de, Tel. 97 32185, Zi. 3-20
Matthias Wendt, wendt@math.uni-leipzig.de, Tel. 97 32144, Zi. 5-49

Literatur

- [Bor74] Armand Borel. Stable real cohomology of arithmetic groups. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 4^e série, 7:235–272, 1974.
- [Bor77] Armand Borel. Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zeta aux points entiers. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*, 4. ser, 4:613–636, 1977.
- [Bot59] Raoul H. Bott. The stable homotopy of the classical groups. *Annals of Mathematics*, 70:313–337, 1959.
- [BS73] Armand Borel and Jean-Pierre Serre. Corners and arithmetic groups. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 48:436–491, 1973.
- [Bur02] José Ignacio Burgos Gil. *The Regulators of Beilinson and Borel*, volume 15 of *CRM Monograph Series*. American Mathematical Society, 2002.
- [BW00] Armand Borel and Nolan Russell Wallach. *Continuous Cohomology, Discrete Subgroups, and Representations of Reductive Groups*, volume 67 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, 2000.
- [Dup78] Johan L. Dupont. *Curvature and Characteristic Classes*, volume 640 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 1978.
- [FHT01] Yves Félix, Stephen John Halperin, and Jean-Claude Thomas. *Rational Homotopy Theory*, volume 205 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2001.
- [Rap88] Michael Rapoport. Comparison of the regulators of Beilinson and Borel. In *Beilinson's Conjectures on Special Values of L-Functions*, volume 4 of *Perspectives in Mathematics*, pages 169–192. Academic Press, 1988.
- [Ros94] Jonathan Micah Rosenberg. *Algebraic K-Theory and its Applications*, volume 147 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1994.