

# Die Tamagawazahlvermutung von Bloch und Kato für Dirichlet-Motive

Oberseminar Algebraische Geometrie  
im Wintersemester 05/06

Eines der faszinierendsten Phänomene in der arithmetischen Geometrie ist die Tatsache, dass viele der tiefliegenden geometrischen Eigenschaften einer arithmetischen Varietät von einer einzigen analytischen Funktion – der Zeta-Funktion – kodiert werden. Bereits im Zahlkörperfall erhält man kraftvolle und erstaunliche Aussagen. Zum Beispiel zeigt die Klassenzahlformel, dass die Zeta-Funktion an den Stellen 0 und 1 wertvolle Informationen über die Einheiten- und Klassengruppe eines Zahlkörpers enthält – und damit Aufschluss über sein gesamtes arithmetisches Verhalten liefert.

Erst vor ein paar Jahren ist es gelungen, ganz ähnlich geartete Verbindungen auch für die Werte der Zeta-Funktion an den übrigen ganzzahligen Stellen zu formulieren und – in Spezialfällen – auch zu beweisen. Im Allgemeinen lässt sich dieser Zusammenhang sogar auf beliebige Motive und ihre  $L$ -Funktionen ausdehnen.

Die Beilinson-Vermutung ist ein erster Schritt in diese Richtung. Sie gibt eine exakte Beschreibung des transzendenten Anteils der  $L$ -Werte an einer ganzen Stelle. Durch die Tamagawazahlvermutung wird diese Aussage noch wesentlich verfeinert. Mit ihr lässt sich der  $L$ -Wert bis auf das Vorzeichen genau identifizieren.

In unserem Seminar wollen wir die Tamagawazahlvermutung im Spezialfall von Dirichlet-Motiven beweisen. Jeder Interessierte ist herzlich zur Teilnahme eingeladen. Das Seminar findet regelmäßig

**dienstags, 15-17ct  
im Felix-Klein-Hörsal (HG 4-24)**

statt. Die erste Veranstaltung ist am

**Dienstag, 11.10.2005, 15-17ct.**

Im Anschluss daran werden die übrigen Vorträge verteilt. Das volle Programm ist auf der Internetseite

[http://www.math.uni-leipzig.de/MI/huber/lehr\\_ws05.html](http://www.math.uni-leipzig.de/MI/huber/lehr_ws05.html)

zu finden.

**Kontakt:** Malte Witte, [witte@math.uni-leipzig.de](mailto:witte@math.uni-leipzig.de), Tel. 97 32239, Zi. 3-08

## Vorträge

### Vortrag 1: Die Klassenzahlformel

Zum Einstieg machen wir ganz klassische Zahlentheorie. Die multiplikative Einbettung in den Minkowski-Raum und der Regulator sollen kurz beschrieben werden ([Neu92], I.5), ebenso der Dirichletsche Einheitensatz ([Neu92], I.7). Im Zentrum des Vortrags sollte aber die Formulierung und, soweit wie möglich, auch der Beweis der Klassenzahlformel stehen ([Neu92], Kap. VII.5, insbesondere Korollar 5.11).

### Vortrag 2: Dirichletsche $L$ -Funktionen und Polylogarithmen

Gib die Definition von Dirichlet-Charakteren und ihren  $L$ -Funktionen, sowie einen Überblick über ihre wichtigsten Eigenschaften, etwa wie in [Neu92], VII.2. Außerdem brauchen wir die Funktionalgleichung für die Hurwitz-Zeta-Funktion ([HK03], Theorem 3.2.3, bzw. [Apo76], Theorem 12,6) und die Darstellung der  $L$ -Funktion mittels Polylogarithmen ([Neu88], Prop. 4.2, bzw. [HK03], Cor. 3.2.4). Insbesondere sollte auf die speziellen Werte der  $L$ -Funktion eingegangen werden ([Neu88], Theorem 4.4). Für die Identifizierung von Dirichlet-Charakteren mit Charakteren der Galois-Gruppe verwenden wir die Konvention von [HK03], Abschnitt 1.1.

### Vortrag 3: Dirichlet-Motive und motivische Kohomologie

Definiere Artin-Motive bzw. Dirichlet-Motive ([HK03], S. 397; [Neu88], I.2) und ihre  $L$ -Funktionen ([HK03], 1.2 bis einschl. Def. 1.2.1; [Neu88], S. 206). Gib eine konkrete Beschreibung ihrer Betti- und DeRham-Realsierung (verallgemeinere das Beispiel auf Seite 399 in [HK03]). Postuliere die Existenz von motivischer Kohomologie und Beilinson-Regulator-Abbildung und zitiere [Neu88], Thm. II.1.1. Das Corollar II.1.2 liefert dann eine konkrete Beschreibung beider Objekte für  $h^0(\mathbb{Q}(\mu_N))(n)$ ,  $n > 1$ . Für  $n = 1$  übernimmt der Dirichletsche Einheitensatz diese Aufgabe, denn

$$\begin{aligned} H_{\mathcal{M}}^1(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}, h^0(\mathbb{Q}(\mu_N))(1)) &= \mathbb{Z}[\mu_N]^{\times} \otimes \mathbb{Q}, \\ H_{\mathcal{M}}^0(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}, h^0(\mathbb{Q}(\mu_N))) &= \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

die Regulatorabbildung ist die multiplikative Einbettung in den Minkowski-Raum und die Zykelklassenabbildung ist dual zur Spurabbildung

$$h^0(\mathbb{Q}(\mu_n))_B \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die allgemeinen Definitionen und die dahinter stehende Theorie sollten allerhöchstens am Rande erwähnt werden. Bei der Notation folgen wir den Konventionen von [HK03].

### Vortrag 4: Die Beilinson-Vermutung

Führe Determinanten ein und erläutere kurz, wie man damit rechnet ([KM76]; [Fon92] §4.1; [Kat93a], §2.1). Definiere die fundamentale Gerade ([HK03], Def.

1.2.2) und erkläre den Isomorphismus von Determinanten in [HK03], Satz 1.2.3. Der Beweis des Satzes sollte nach Vortrag 3 trivial sein. Formuliere die Beilinson-Vermutung für Dirichlet-Motive in der Sprache der Determinanten (siehe [HK03], Vermutung 1.2.8, erster Teil). Benutze [Neu88], I.5 und die Ergebnisse aus Vortrag 2 und 3, um aus Thm. II.1.1 die Beilinson-Vermutung für Dirichlet-Motive für  $r \leq 0$  herzuleiten ([Neu88], Thm. I.5.2). Die Spezialfälle  $r = 0$  bzw.  $\chi = 1$  zitieren wir dabei nur. Für  $r > 0$  folgt die Beilinson-Vermutung dann aus der Kompatibilität mit der Funktionalgleichung (Vortrag 8).

## Vortrag 5: $p$ -adische Realisierungen und $f$ -Kohomologie

Bearbeite den Rest von [HK03], 1.1. Setze dabei stets  $S = \emptyset$ . Das ist der einzige Fall, der uns interessiert. Die Existenz des  $p$ -adischen Regulators postulieren wir wieder. Außerdem wird aber auch die  $p$ -adische Zykelklassenabbildung

$$H_{\mathcal{M}}^0(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}, h^0(K)) \rightarrow H_{\mathrm{ét}}^0(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}[1/p], h^0(K)_p)$$

benötigt. Über  $p$ -adische Hodge-Theorie (fundamentale exakte Sequenz, Exponentialfunktion, etc.) brauchen wir auch nur das Allernötigste zu wissen. Formuliere klar und deutlich lokale Dualität ([BK90], Prop. 3.8 für  $\ell = p$ ), da wir die Aussage des öfteren brauchen werden. Definiere dann Katos kompakte Kohomologie ([HK03], S. 402) und  $f$ -Kohomologie ([HK03], S. 403 unten bis vor Def. 1.2.7). Greife, wenn nötig, auf [Fon92] zurück. Erwähne außerdem, dass die konstruierbare Garbe  $j_*T_p(\chi)(r)$  die Eulercharakteristik

$$\chi(\mathbb{Z}_p[1/p], j_*T_p(\chi)(r)) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \mathrm{rk} H_{\mathrm{ét}}^i(j_*T_p(\chi)(r)) = -1$$

besitzt ([Mil86], Thm 2.13, zusammen mit [Nek03], Cor. 4.6.10).

## Vortrag 6: Formulierung der Bloch-Kato-Vermutung

Folge [HK03], 1.2, sofern der Inhalt noch nicht in den vorherigen Vorträgen abgehandelt worden ist, und formuliere Theorem 1.3.1. Von Prop. 1.2.9 brauchen wir nur Teil (a). Der Isomorphismus auf S. 406 oben in [HK03] folgt nicht unmittelbar aus [Mil86], Theorem II.3.1. (Die Kohomologie mit kompaktem Träger in [Mil86] stimmt übrigens nicht mit unserer Definition überein.) Man muss hier noch einige technische Schwierigkeiten überwinden. Es gibt aber eine Diplomarbeit von einem Studenten von G. Kings [Dip] zu diesem Thema. Daraus können wir das entsprechende Dualitätstheorem hoffentlich einfach zitieren. Im Fall lokal konstanter  $\mathbb{Z}_p$ -Garben hilft auch [Nek03], Thm. 5.4.5 weiter.

## Vortrag 7: Der Klassenzahlfall

Beweise ausführlich [HK03], Prop. 2.3.1 für  $r = 0$ . Gehe dabei soweit wie möglich auch auf Anhang A ein.

## Vortrag 8: Verträglichkeit mit der Funktionalgleichung

Gegenstand dieses Vortrags ist [HK03], 2.2. Wir brauchen aber nur die Kompatibilität für die Bloch-Kato-Vermutung mit Koeffizienten in  $E$ , nicht die äquivalente Aussage. Formuliere den Abschnitt entsprechend um. Beachte weiterhin, dass wir noch nicht wissen, dass  $\varepsilon(\omega)(r)$  rational ist. Diese Aussage gehört mit in Vermutung 2.2.1. Theorem 2.2.2 wird in Vortrag 9 bewiesen. Benutze schließlich die Funktionalgleichung, um Prop. 2.3.1 für  $r = 1$  zu beweisen.

## Vortrag 9: Verträglichkeit mit der Funktionalgleichung II

Gib einen Überblick über den Beweis von [HK03], Theorem 2.2.2 (in der absoluten Formulierung aus Vortrag 8). Folge dazu Anhang B. Gehe dabei auch auf das explizite Reziprozitätsgesetz von Kato ([Kat93a], Theorem 2.1.7) ein.

## Vortrag 10: Zyklotomische Elemente

Folge Abschnitt 3.1 und 3.2 von [HK03]. Definition 3.1.4 und Lemma 3.1.5 brauchen wir nicht; Theorem 3.2.3 und Folgerung 3.2.4 sind uns schon aus Vortrag 2 bekannt.

## Vortrag 11: Umformulierung der Bloch-Kato-Vermutung

Theorem 3.3.2 in [HK03] läßt sich wortgleich auch für  $r \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$  formulieren. Der Beweis für  $r < 0$  entspricht dabei dem Beweis von Thm. 5.2.3 ohne das Argument mit der Hauptvermutung. Zitiere dazu Theoreme 5.2.1 und 5.2.2. Theorem 5.2.1 ist identisch mit [Neu88], Thm. II.1.1 und damit aus Vortrag 3 bekannt. Theorem 5.2.2 ist die  $p$ -adische Variante davon. Lemma 3.3.1 brauchen wir ebenfalls für  $r \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$  (sonst ergibt der Beweis von Thm. 5.2.3 keinen Sinn). Für  $r > 1$  folgt das Lemma leicht aus dem Theorem von Soulé ([HK03], S. 399 unten) und der Euler-Charakteristik; für  $r < 0$  bleibt uns wahrscheinlich nichts anderes übrig als auf [Rub00] zu verweisen. Mittels der Funktionalgleichung können wir schließlich noch den Fall ungleicher Parität abhandeln (Cor. 5.1.2, Cor. 5.2.4). Folgerungen 3.3.3 und 3.3.4 brauchen wir nicht.

## Vortrag 12: Reduktion auf die Hauptvermutung

Aus [HK03], Abschnitt 4.1 brauchen wir Def. 4.1.1, Def. 4.1.2 und Lemma 4.1.3 – soweit sie  $H_{\text{gl}}^q(T_p(\chi)(k))$  betreffen, Def. 4.1.7 und Lemma 4.1.8. Kommentiere den Beweis von Satz 4.2.1.(a). Formuliere die Hauptvermutung im Fall gleicher Parität (Theorem 4.2.2 ohne die Aussage über  $H_{\text{loc}}$ ) und benutze unsere Version von Theorem 3.3.2, um den Beweis der Bloch-Kato-Vermutung für  $r \neq 0, 1$  zu beenden.

## Optionale Vorträge und Gastvorträge

**Beweis der Hauptvermutung für  $\mathbb{Q}(\mu_p)$**  Für die geraden Charaktere von  $\mathbb{Q}(\mu_p)$  ist der Beweis von [HK03], Theorem 4.2.2, etwas einfacher. Dieser Fall wird in [Was97], §15.7 behandelt.

**Motivische Polylogarithmen** Ziel des Vortrags ist es, einen Überblick über den Beweis von [HK03], Thm. 5.2.1 und Thm. 5.2.2 zu geben. Als Basis könnte entweder [HK99a] und [HK99b] oder [HW98] dienen.

**Aktueller Stand der Forschung** Gegenstand könnte die nichtkommutative Bloch-Kato-Vermutung oder die Bloch-Kato-Vermutung für elliptische Kurven sein.

## Literatur

Ein ausgezeichneter Überblick über die Bloch-Kato-Vermutung findet sich in [Kin03]. David Burns und Cornelius Greither haben die Bloch-Kato-Vermutung in äquivarianter Form bewiesen [BG03]; eine Übersicht darüber findet sich in [Fla04]. Dort wird auch der Fall  $p = 2$  behandelt. Siehe [BK90], [Kat93a] und [Fon92] für die ursprüngliche Formulierung der Tamagawazahl-Vermutung, [BF01] für eine nicht-kommutative Verallgemeinerung.

Alternative Beweise für die Beilinson-Vermutung und die  $p$ -adische Form des Hauptlemmas lassen sich in [HW98], bzw. [HK99a] und [HK99b] finden.

Die Bücher [Nek03] und [NSW00] sind gute Referenzen für Fragen über algebraische Zahlentheorie und Galois-Kohomologie; für zyklotomische Körper und Iwasawa-Theorie ist [Was97] die Standardreferenz. Etale Kohomologie wird in [Mil80] und [Mil86] behandelt,  $l$ -adische Kohomologie in [Jan88] und [Eke90].

- [Apo76] T. M. Apostol, *Introduction to analytic number theory*, Springer, 1976.
- [Bei85] A. Beilinson, *Higher regulators and values of  $L$ -functions*, J. Soviet. Math. **30** (1985), 2036–2070.
- [BF01] David Burns and Matthias Flach, *Tamagawa numbers for motives with (non-commutative) coefficients*, Doc. Math. **6** (2001), 501–570.
- [BG03] David Burns and Cornelius Greither, *On the equivariant Tamagawa number conjecture for Tate motives*, Invent. Math. **153** (2003), 303–359.
- [BK90] Spencer Bloch and Kazuya Kato,  *$L$ -functions and Tamagawa numbers of motives*, The Grothendieck Festschrift, vol. 1, Progr. Math., no. 86, Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 333–400.
- [Del87] Pierre Deligne, *Le déterminant de la cohomologie*, Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry, Contemp. Math., vol. 67, American Math. Soc., 1987, pp. 93–177.
- [Dip] Diplomarbeit, *Universität Regensburg*, Näheres wird noch bekanntgegeben.
- [Eke90] Torsten Ekedahl, *On the adic formalism*, The Grothendieck Festschrift, vol. 87, Progress in Mathematics, no. II, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, pp. 197–218.
- [Fla04] Matthias Flach, *The equivariant Tamagawa number conjecture: A survey.*, Stark’s Conjectures: Recent Work and New Directions, Contemp. Math., vol. 358, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 79–125.
- [Fon92] J.-M. Fontaine, *Valeurs spéciales des fonctions  $L$  des motifs*, Astérisque **206** (1992), no. 4, 205–249.

- [HK99a] Annette Huber and Guido Kings, *Degeneration of  $l$ -adic Eisenstein classes and of the elliptic polylog*, Invent. Math. **135** (1999), 545–594.
- [HK99b] ———, *Dirichlet motives via modular curves*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **32** (1999), no. 4, 313–345.
- [HK03] ———, *Bloch-Kato conjecture and main conjecture of Iwasawa theory for Dirichlet characters*, Duke Mathematical Journal **119** (2003), no. 3, 395–464.
- [HW98] Annette Huber and Jörg Wildeshaus, *Classical motivic polylogarithm according to Beilinson and Deligne*, Doc. Math. **3** (1998), 27–133, 297–299 (Correction).
- [Jan88] Uwe Jannsen, *Continuous étale cohomology*, Math. Ann. **280** (1988), 207–245.
- [Kat93a] K. Kato, *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil  $L$ -functions via  $B_{dR}$* , Arithmetic Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math., vol. 1553, Springer, 1993, pp. 50–163.
- [Kat93b] Katsuya Kato, *Iwasawa theory and  $p$ -adic Hodge theory*, Kodai Math. J. **16** (1993), no. 1, 1–31.
- [Kin03] G. Kings, *The Bloch-Kato conjecture on special values of  $L$ -functions. A survey of known results.*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), 179–198.
- [KM76] Finn Knudsen and David Mumford, *The projectivity of the moduli spaces of stable curves I*, Math. Scand. **39** (1976), no. 1, 19–55.
- [Mil80] James S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, New Jersey, 1980.
- [Mil86] ———, *Arithmetic duality theorems*, Perspectives in Mathematics, vol. 1, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1986.
- [Nek03] Jan Nekovář, *Selmer complexes*, Preprint, second version, November 2003.
- [Neu88] Jürgen Neukirch, *The Beilinson conjecture for algebraic number fields*, Beilinson’s Conjectures on Special Values of  $L$ -Functions (P. Schneider M. Rapoport, N. Schappacher, ed.), Perspectives in Mathematics, Academic Press, 1988, pp. 193–248.
- [Neu92] ———, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Verlag, 1992.
- [NSW00] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg, *Cohomology of number fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.
- [Rub00] Karl Rubin, *Euler systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. 147, Princeton University Press, New Jersey, 2000.

- [Sou81] C. Soulé, *On higher  $p$ -adic regulators*, Algebraic  $K$ -Theory, Lecture Notes in Math., vol. 854, Springer, 1981, pp. 372–401.
- [Sou82] ———, *Operations on étale  $K$ -theory*, Algebraic  $K$ -Theory (Part I), Lecture Notes in Math., vol. 966, Springer, 1982, pp. 271–303.
- [Was97] Lawrence C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, 2 ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 83, Springer-Verlag, New York, 1997.