

Prof. Dr. Annette Huber-Klawitter
Dr. Claus Diem
{huber, diem}@math.uni-leipzig.de

Oberseminar

Geometrische Klassenkörpertheorie

Zeit. Dienstag, 15 ct

Beginn. 4. April '06

Literatur. Die Hauptreferenz ist Serre: Algebraic Groups and Class Fields. Daneben ist noch Milne: Jacobian Varieties [Mi] und M. Artin: Néron Models [Ar] (beides in Cornell, Silverman: Arithmetic Geometry) interessant.

Vorträge.

4.4. I Einführung

Postuliere die Theoreme aus Kapitel I + “Die Abb. $X \longrightarrow J_{\mathfrak{m}}$ ist maximal” sowie die geometrischen Klassenkörpertheorie (Theorem I auf Seite 131). Beweise dann Theorem 4 auf Seite 149.

11.4. I (Fortsetzung)

II Beweis der allgemeinen geometrischen Klassenkörpertheorie

Beweise Theorem I auf Seite 131, postuliere dabei (weiterhin) Theorem 4 aus der Einleitung

18.4. II (Fortsetzung)

25.4. III Singuläre Kurven, Differentiale und der Satz von Riemann-Roch

Stelle Kapitel II und IV dar. Auf jeden Fall sollen singuläre Kurven zu Moduln, Differentiale auf singulären Kurven, Adele (Répartitions), Dualität und der Satz von Riemann-Roch vorkommen.

Zeige auch den Isomorphismus $\text{Pic}^0(X_{\mathfrak{m}}) \simeq \text{Cl}_{\mathfrak{m}}^0(X)$, wobei X eine glatte Kurve und $X_{\mathfrak{m}}$ die durch den Modul $\mathfrak{m}$ definierte singuläre Kurve ist.

2.5. III (Fortsetzung)

9.5. III (Fortsetzung)

16.5. IV Lokale Symbole und Abbildungen in kommutative Gruppen, explizite Klassenkörpertheorie

Stelle §1, §2 aus Kapitel II vor. Postuliere dabei (wie im Serre) die Sätze von Chevalley (Proposition 11,12 auf Seite 40). Erkläre den Zusammenhang mit den “lokalen Symbolen” in Kapitel VI, Abschnitt 30. Erkläre die expliziten Reziprozitätsgesetze (Examples 1), 2) auf Seite 151).

23.5. IV (Fortsetzung)

30.5. IV (Fortsetzung)

30.5. V Die Konstruktion der verallgemeinerten Jacobischen

Zeige, dass zu jeder Kurve X_m die Jacobische existiert. Benutze dazu die Theorie der Schemata und imitiere soweit möglich den Beweis in §7 von [Mi]. Zeige dabei auch den “Satz von Weil”: Zu jedem birationalen Gruppengesetz gibt es eine algebraische Kurve (siehe §2 in [Ar]).

Zeige auch die “universelle Eigenschaft von J_m ” (Theoreme 1, 2 auf S.88).

6.6. (Pfungsten)

13.6. V (Fortsetzung)

27.6. V (Fortsetzung)

VI Die Struktur der verallgemeinerten Jacobischen

Stelle §3 aus Kapitel V dar.

4.7. VI (Fortsetzung)

20.6. VII Universelle Galoisüberlagerungen

Beweise Theorem 4 aus der Einleitung, d.h. Proposition 7 auf Seite 119. Gib auch einige spezielle Resultate zu Kurven an (Kapitel VI, Abschnitte 9,10,11,12, insb. die Beispiele auf S.124).

11.7. VII (Fortsetzung)

VIII Die Sätze von Chevalley

Beweise soweit möglich Propositionen 11 und 12 auf Seite 40. (Achtung: Die Literaturlage ist unklar.)

18.7. VIII (Fortsetzung)

Zu dem Buch von Serre

In diesem Buch wird zunächst ein “naiver Zugang” ähnlich wie in Silverman: The Arithmetic of Elliptic Curves verfolgt. In Kapitel 5 wird die Sprache von Weil benutzt.

Die Vorträge sollten auf der Theorie der Schemata beruhen. Hier ist eine Übersetzungshilfe:

Naiver Zugang -> Schemata

- “Sei X eine über k definierte Kurve.” -> “Sei X eine Kurve über k .”
- “Sei $P \in X$.” -> “Sei $P \in X(\bar{k})$.”
- “Sei D ein Divisor auf X .” -> “Sei D ein Divisor auf $X_{\bar{k}}$.”
- “Sei D ein k -rationaler Divisor.” -> “Sei D ein Divisor auf X .”
- “rationaler Primzykel” -> “abgeschlossener Punkt”.

Weil -> Schemata

Grundlage ist eine feste Körpererweiterung $\Omega|k$ von unendlichem Transzendenzgrad. Es werden Varietäten über k oder Erweiterungskörpern von k in Ω betrachtet.

- “Sei P ein Punkt von X .” -> “Sei $P \in X(\Omega)$.”
- “Sei P ein generischer Punkt von X .” -> “Sei $P \in X(\Omega)$, wobei das Bild von $\text{Spec}(\Omega)$ in X der generische Punkt ist.”
- “Seien P_1 und P_2 zwei unabhängige generische Punkte auf X .” -> “Seien $P_1, P_2 \in X(\Omega)$, so dass das Bild des induzierten Morphismus $(P_1, P_2) : \text{Spec}(\Omega) \rightarrow X \times X$ der generische Punkt ist.”

Zur Übersetzung

Man sollte versuchen, die Aussagen nicht einfach nur zu übersetzen sondern auch zu “modernisieren”.

Beispiele:

- Grundsätzlich sollte man mit Divisoren auf X (und nicht auf $X_{\bar{k}}$) arbeiten. Ein “Modul” auf X sollte z.B. ein effektiver Divisor auf X sein. Damit ändern sich einige Aussagen und Beweise. Z.B. kann man im Beweis von Proposition 21 auf S.147 die Aussage “after replacing $\mathfrak{m}$ by a sum of its conjugates, we can assume that $\mathfrak{m}$ is rational over k ” weglassen.
- Auf Seite 28 wird das “lokale Symbol” $(f, g)_P$ definiert, wobei “ $P \in X$ ” ist (d.h. $P \in X(\bar{k})$). Dies sollte man modernisieren “sei P ein abgeschlossener Punkt von X ”. Dann kommt die Definition näher an die auf S.150 heran und in Proposition 26 auf S.151 fällt die Summe weg.