

ÜBER DIE ARITHMETIK VON 1-MOTIVEN

Sei k ein Zahlkörper mit algebraischem Abschluss $\bar{k}$. Ein 1-Motiv über k ist ein Komplex

$$M = [Y \longrightarrow G]$$

wobei G eine semiabelsche Varietät über k ist, und Y eine endlich erzeugte freie kommutative Gruppe mit stetiger $\text{Gal}(\bar{k}|k)$ -Wirkung. Informell ist ein 1-Motiv ein Amalgam aus einem Torus, einer abelschen Varietät und einem freien, endlich erzeugten Galoismodul.

Viele Konstruktionen die man aus der Theorie der abelschen Varietäten kennt kann man auf 1-Motive verallgemeinern. Zu einem 1-Motiv M gibt es ein duales 1-Motiv $M^\vee$, einen ℓ -adischen Tatemodul $T_\ell M$ und eine Weil-Paarung

$$e_\ell : T_\ell M \times T_\ell M^\vee \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$$

mit allen wünschenswerten Eigenschaften. Die $\bar{k}$ -Punkte $[Y \longrightarrow G(\bar{k})]$ von M formen einen Komplex von stetigen Galoismoduln, und so erhält man Galoiskohomologiegruppen $H^i(k, M)$, und Tate-Shafarevich Gruppen $\text{III}^i(k, M)$.

Ziel dieses Vortrages ist es zu zeigen, dass Sätze aus der arithmetischen Geometrie die typischerweise für abelsche Varietäten oder Tori bekannt sind, allgemeiner für 1-Motive gelten. So etwa Faltings berühmter Satz über Homomorphismen von abelschen Varietäten über Zahlkörpern, Poitou-Tate Dualität oder Chassels-Tate Dualität.

ON THE ARITHMETIC OF 1-MOTIVES

Let k be a number field with algebraic closure $\bar{k}$. A 1-motive over k is a complex

$$M = [Y \longrightarrow G]$$

where G is a semiabelian variety over k , and Y is a finitely generated free commutative group with continuous $\text{Gal}(\bar{k}|k)$ -action. Informally speaking, a 1-motive is a compound of a torus, an abelian variety and a free, finitely generated Galois module.

Many constructions that are known from the theory of abelian varieties can be generalized to 1-motives. With a 1-motive M one can associate a dual 1-motive $M^\vee$, an ℓ -adic Tate module $T_\ell M$ and a Weil-pairing

$$e_\ell : T_\ell M \times T_\ell M^\vee \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1)$$

having all properties one can hope for. The $\bar{k}$ -points $[Y \longrightarrow G(\bar{k})]$ of M yield a complex of continuous Galois modules, and this way one defines Galois cohomology groups $H^i(k, M)$, and Tate-Shafarevich groups $\text{III}^i(k, M)$.

The aim of this talk is to show that many interesting theorems from arithmetic geometry, typically known for abelian varieties and tori, continue to hold 1-motives. Among them, Faltings's famous theorem on homomorphisms of abelian varieties over number fields, Poitou-Tate duality or Chassels-Tate duality.